

Metodi statistici e dinamica ferroviaria

Dott. Ing. Adriano BONADERO (*)

SOMMARIO - I moti parassiti dei veicoli ferroviari sono eccitati dalle irregolarità di binario, le quali sono distribuite in modo aleatorio.

Si impongono quindi metodi di tipo statistico sia nella elaborazione dei risultati sperimentali sia in sede di progetto.

Il presente lavoro, dopo un cenno sulle principali funzioni statistiche, descrive i procedimenti di calcolo e li illustra mediante un modello semplificato a tre gradi di libertà con il quale si mette in evidenza l'importanza della qualità del binario sul comportamento dinamico dei veicoli.

Introduzione

I problemi e le difficoltà, incontrate quando si è voluto aumentare le velocità di esercizio, hanno stimolato da un lato l'impiego di strumentazioni sempre più perfezionate per meglio indagare i fenomeni dinamici, proseguendo in tal modo il procedimento empirico-intuitivo in uso fin da primordi della tecnica ferroviaria; d'altro canto si comprese che tale via era ormai insufficiente per affrontare problemi assai complessi come, ad esempio, quello della stabilità laterale, ancora chiamato genericamente "problema del serpeggio" ai tempi del concorso *ORE* del 1955.

Ebbero allora inizio gli studi veri e propri sulla dinamica laterale perché si individuò nella interazione ruota-rotaia ed in particolare nel fenomeno del microscorrimento l'origine e la causa dell'instabilità.

L'applicazione dei nuovi concetti portò alla elaborazione di modelli matematici via via più complessi, passando da quello della sala singola a quelli dei carrelli bi e triassi e dei veicoli a carrelli.

Questi studi furono facilitati dallo sviluppo degli elaboratori elettronici, mediante i quali vennero risolti problemi relativi a sistemi con decine di gradi di libertà, la cui soluzione fino agli anni 60-65 era praticamente impossibile.

Un precedente si era indagato, sempre per via sperimentale sulla qualità di marcia e sul grado di confort, mettendo a punto procedimenti di valutazione consistenti nella determinazione di "indici" come quello delle ore di affaticamento presso *SNCF* o quello del "*W_z*" presso *DB*; anche per questi gli elaboratori hanno consentito l'adozione di metodi di calcolo più raffinati e precisi di quelli manuali che erano anche estremamente laboriosi.

La necessità di aumentare la velocità di esercizio per mantenere il passo con gli altri mezzi di trasporto ha dato luogo ad una fioritura notevole di lavori sulla stabilità di marcia dei carrelli: la ricerca è tuttora in corso perché è ancora incompleta la conoscenza dei fenomeni di interazione tra ruota e rotaia; tuttavia i progressi registrati in questo campo hanno permesso di affrontare in modo più concreto i problemi relativi al confort per i quali il metodo quasi esclusivamente usato fino a 10-15 anni fa era

quello della risposta in frequenza per un moto di sala imposto di tipo armonico: il procedimento era inadeguato soprattutto per i moti laterali perché in tale modo venivano trascurati del tutto i fenomeni di interazione.

Nel corso degli studi e delle prove degli ultimi due decenni è emerso anche un altro fatto importante e cioè l'influenza delle caratteristiche del binario sulle prestazioni dinamiche dei veicoli: tali caratteristiche riguardano sia l'aspetto geometrico relativo al profilo delle rotaie, (angolo di posa ed irregolarità di livellamento, di allineamento, ecc.) sia l'aspetto meccanico relativo a rigidità e smorzamenti, verticali ed orizzontali, delle vie di corsa.

Ne segue che uno studio completo del moto dei veicoli deve prendere in considerazione veicolo e binario come un sistema unico.

Dal punto di vista del confort di marcia emerge subito l'importanza dei metodi statistici nelle analisi e nelle indagini su questo argomento: scopo di questo lavoro è quello di esporre la possibilità di applicazione della statistica nei problemi di dinamica ferroviaria.

1. Cenni sulle funzioni statistiche

Un fenomeno fisico viene detto aleatorio o casuale se non può essere descritto da una relazione matematica esplicita: cioè ogni gruppo di dati che rappresentano il fenomeno nel tempo è solo un esempio di un numero infinitamente grande di gruppi che si possono verificare: tale gruppo si chiama "funzione-campione" o "registrazione campione" perché osservato su un intervallo di tempo finito.

L'insieme di tutte le possibili funzioni campione che il fenomeno aleatorio può presentare viene chiamato processo aleatorio o stocastico: le sue proprietà possono essere descritte dal suo valore medio μ_w , calcolato prendendo i valori istantanei in un certo tempo t_1 di ciascun gruppo sommandoli e dividendo per il numero dei gruppi (fig. 1.1); analogamente si può calcolare la correlazione tra due valori in tempi diversi [chiamata funzione di autocorrelazione: $R_w(t_1, t_1 + \tau)$] prendendo la media del prodotto di valori istantanei per t_1 e $t_1 + \tau$.

Le loro espressioni matematiche sono

$$\mu_w(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (1.1)$$

(*) Della FIAT FERROVIARIA SAVIGLIANO S.p.A.

N.B. I numeri entro parentesi quadra si riferiscono ai lavori citati nella Bibliografia.

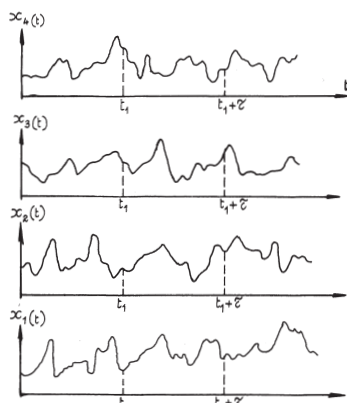


Fig. 1.1 - Insieme di funzioni campione, costituenti un processo aleatorio

$$R_w(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \cdot x_k(t_1 + \tau) \quad (1.2)$$

valide nella ipotesi che ciascuna funzione campione abbia la stessa probabilità di verificarsi.

Se μ_w , R_w non variano se cambia t_1 , il fenomeno aleatorio si chiama stazionario in senso largo.

Per una data funzione campione (k) il valore medio e la funzione di autocorrelazione (fig. 1.2a) sono date da

$$\mu_w(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot dt \quad (1.3)$$

$$R_w(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) \cdot dt \quad (1.4)$$

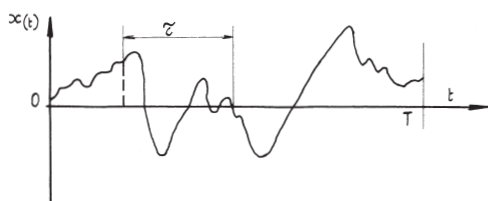


Fig. 1.2 a) - Misura di autocorrelazione

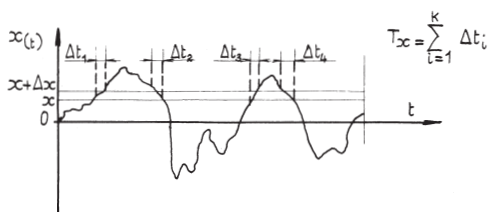


Fig. 1.2 b) - Misura di probabilità

Se il sistema è stazionario come prima definito, e se $\mu(k)$ ed $R(\tau, k)$ non variano se calcolate su funzioni campione diverse, il fenomeno viene detto ergodico.

Generalmente i processi pratici che si incontrano si possono considerare stazionari ed ergodici.

Le proprietà dei fenomeni stocastici si possono anche descrivere in termini probabilistici con le funzioni di densità di probabilità e di probabilità cumulativa (fig. 1.2b).

La prima descrive la probabilità che il valore del processo ad un dato istante appartenga ad un certo intervallo di valori e viene definita così

$$\text{Prob}[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad (1.5)$$

e per Δx tendente a zero

si ottiene la funzione di densità di probabilità

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right] \quad (1.6)$$

dove T_x è la frazione del tempo totale T per la quale $x(t)$ si trova nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$. Per distribuzione normale o gaussiana la densità di probabilità ha la classica forma di fig. 1.3.

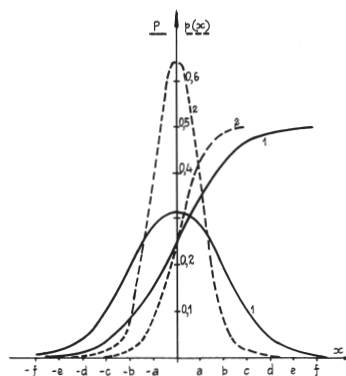


Fig. 1.3 a) - Curve gaussiane di probabilità

$$\% \int_{-t_c}^{+t_c} p(x) \cdot dx$$

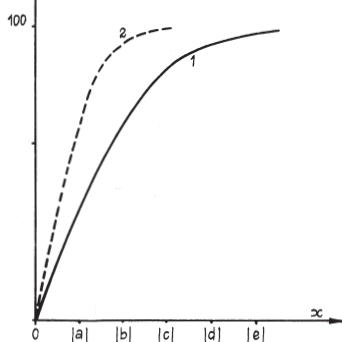


Fig. 1.3 b) - Curve gaussiane di probabilità cumulativa

La funzione di distribuzione della probabilità cumulativa rappresenta la probabilità che il valore istantaneo $x(t)$ sia minore od uguale ad un certo valore x ; essa è data dallo integrale di $p(x)$ da $-\infty$ a x

$$P(x) = \text{Prob}[x(t) \leq x] = \int_{-\infty}^x p(\xi) \cdot d\xi \quad (1.7)$$

Un terzo modo di descrivere le proprietà di un fenomeno stocastico è costituita dalla funzione di densità spettrale di potenza (detta anche funzione di densità autospettrale) che indica, nel dominio delle frequenze, la composizione generale in frequenze dei dati del fenomeno in termini di densità spettrale (Ψ_x^2) del valore quadratico medio: idealmente l'autospettro può essere ottenuto filtrando il segnale con un filtro perfetto a banda stretta ($f, f + \Delta f$) e calcolando la media del quadrato del segnale uscente dal filtro

$$\Psi_x^2(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) \cdot dt \quad (1.8)$$

per Δf piccolo si definisce la funzione $G_x(f)$ densità spettrale di potenza

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Psi_x^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) \cdot dt \right] \quad (1.9)$$

il termine "densità di potenza" deriva dal fatto che se la grandezza $x(t)$ fosse una tensione e venisse applicata ad un resistore del valore di 1Ω la densità spettrale sarebbe pari alla potenza dissipata in calore nel campo delle frequenze f ed $(f + df)$.

È da ricordare una importante proprietà di queste funzioni: per processi stazionari, tra densità spettrale e funzione di autocorrelazione esistono le seguenti relazioni

$$G_x(f) = 4 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cdot \cos 2\pi f \tau \cdot d\tau \quad (\text{nel campo } 0 \leq f < +\infty) \quad (1.10)$$

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f \tau \cdot d\tau \quad (\text{nel campo } -\infty \leq f \leq +\infty) \quad (1.11)$$

Integrando $G_x(f)$ oppure $S_x(f)$ nei rispettivi campi di frequenza, si ottiene il valore quadratico medio della grandezza aleatoria $x(t)$

$$\Psi_x^2 = \int_0^{+\infty} G_x(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot df \quad (1.12)$$

La differenza tra Ψ_x^2 ed il quadrato del valore medio (μ_x^2) è

$$\sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1.13)$$

e prende il nome di "varianza"; la radice quadrata positiva σ_x della varianza è la "deviazione standard": essa dà un'idea della dispersione dei valori del processo x intorno al valore medio μ_x .

Altra proprietà caratteristica dei processi stazionari gaussiani è quella per cui si può esprimere la funzione "densità di probabilità" e quella relativa alla "probabilità cumulativa nel campo $(-k\sigma_x) \div (+k\sigma_x)$ " in funzione della deviazione standard.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot 2\pi} \exp \left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]; P_k(\delta_x) = \int_{-k\delta_x}^{+k\delta_x} p(\xi) \cdot d\xi \quad (1.14)$$

Nella fig. 1.4 sono rappresentate le due funzioni di probabilità, insieme con le funzioni di autocorrelazione e di densità spettrale, relative ad un processo aleatorio a larga banda di frequenza.

Le rappresentazioni probabilistiche sono utili in quanto consentono, nel caso di distribuzione normale, una valutazione dei campi entro i quali sono comprese le grandezze che interessano;

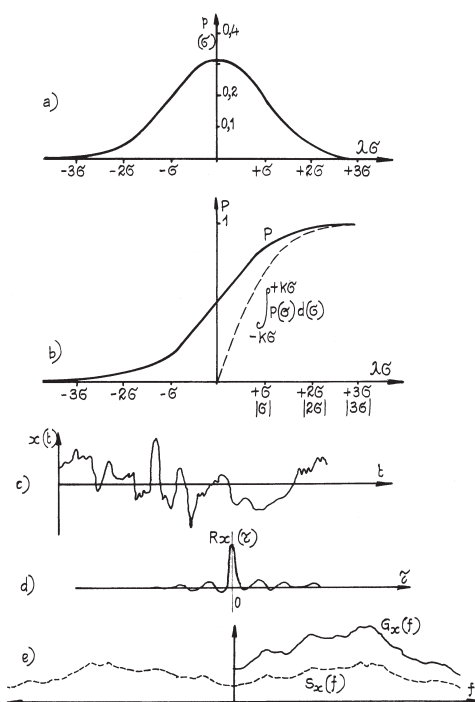


Fig. 1.4 - a) Densità di probabilità in funzione di δ_x ; b) δ rotabilità cumulativa in funzione di δ_x ; c) Segnale aleatorio a larga banda $x(t)$; d) Funzione di autocorrelazione per $x(t)$; e) Funzione di autospettro per $x(t)$

infatti entro l'intervallo $\pm \sigma$ è compreso il 68,3% dei valori, entro l'intervallo $\pm 2\sigma$ è compreso il 95,4% dei valori, entro $\pm 3\sigma$ è compreso il 99,7% dei valori della variabile in studio.

Finora si è parlato delle funzioni statistiche usate nella descrizione delle proprietà di processi aleatori individuali.

È utile spesso descrivere proprietà congiunte o comuni di dati appartenenti a due o più processi distinti; analogamente a quanto si è visto, anche in questi casi si hanno tre tipi di funzioni statistiche:

a) la funzione $p(x, y)$ di densità di probabilità congiunta che viene qui illustrata per il caso di due processi (ved. fig. 1.5): essa esprime la probabilità che detti processi in un certo istante assumano contemporaneamente valori compresi entro una coppia di intervalli: analiticamente essa si definisce così

$$p(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_{xy}}{T} \right] \quad (1.15)$$

in cui T_{xy} è il tempo per cui $x(t), y(t)$ si trovano simultaneamente negli intervalli $(x, x + \Delta x), (y, y + \Delta y)$, mentre T è il tempo totale di osservazione.

La probabilità che i valori istantanei $x(t), y(t)$ siano minori o uguali a certi valori x, y , si chiama funzione $[P(x, y)]$ congiunta di distribuzione di probabilità

$$P(x, y) = \text{Prob}[x(t) \leq x; y(t) \leq y] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (1.16)$$

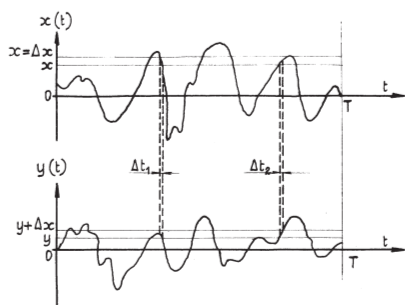


Fig. 1.5 a) - Misura di probabilità congiunta

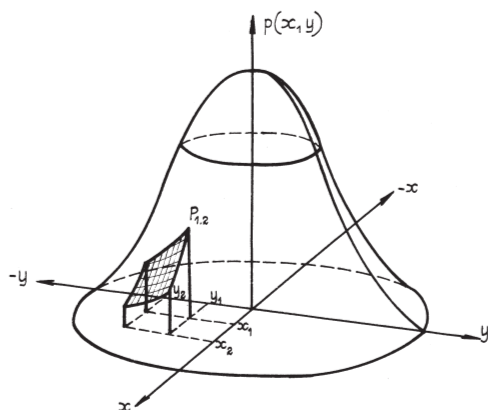


Fig. 1.5 b) - Rappresentazione tridimensionale di densità di probabilità congiunta

Se due processi sono statisticamente indipendenti, la funzione di densità di probabilità congiunta è pari al prodotto delle densità di probabilità individuali.

La rappresentazione tridimensionale di $p(x, y)$ per processi normali o gaussiani assume la forma caratteristica della campana (fig. 1.5b);

b) la funzione di correlazione incrociata fra due gruppi di dati aleatori descrive la dipendenza generale dei valori di un gruppo dai valori dell'altro

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (\text{ved. fig. 1.6}) \quad (1.17)$$

Se $R_{xy}(\tau) = 0$, $x(t)$ e $y(t)$ si dicono non correlati per il dato valore τ . Se poi $x(t)$ e $y(t)$ sono statisticamente indipendenti $R(\tau) = 0$ per qualsiasi valore di τ .

c) la funzione di densità spettrale incrociata esprime, nel dominio delle frequenze, quanto la funzione di correlazione incrociata esprime nel dominio temporale: essa si ottiene applicando la trasformazione di Fourier alla funzione di correlazione incrociata

$$G_{xy} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau = 4 \int_0^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot \cos 2\pi f\tau \cdot d\tau \quad (1.18)$$

G_{xy} è generalmente un numero complesso

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f) \quad (1.19)$$

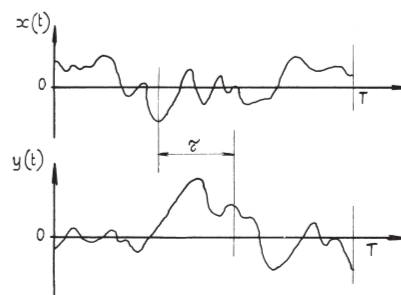


Fig. 1.6 a) - Misura di correlazione incrociata

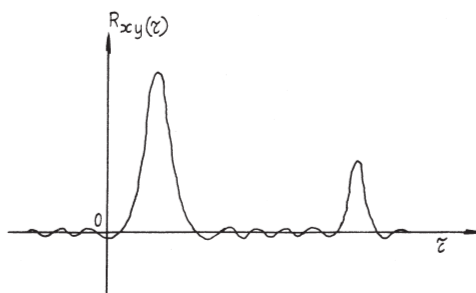


Fig. 1.6 b) - Diagramma tipico di correlazione incrociata

la parte reale $C_{xy}(f)$ si chiama funzione di densità spettrale coincidente; la parte immaginaria $Q_{xy}(f)$ è la funzione di densità spettrale in quadratura.

Il significato di C è quello di prodotto medio di $x(t)$ e $y(t)$ in un breve intervallo di frequenza ($f, f + \Delta f$) diviso per Δf ; Q è un prodotto medio analogo in cui $x(t)$ oppure $y(t)$ è spostato in modo da avere un ritardo di 90° alla frequenza f .

In notazione polare

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| \cdot e^{-j\theta_{xy}(f)} \quad (1.20)$$

dove

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{C_{xy}^2 + Q_{xy}^2} \quad (1.20a)$$

$$\theta_{xy}(f) = \arctan \left[\frac{Q_{xy}}{C_{xy}} \right] \quad (1.20b)$$

Nelle applicazioni viene anche usata la quantità reale

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f) \cdot G_y(f)} \leq 1 \quad (1.21)$$

che viene chiamata funzione di coerenza.

Se $\gamma^2 = 0$ per una particolare frequenza, $x(t)$ e $y(t)$ si dicono incoerenti a quella frequenza (o non correlate).

Se i processi $x(t) \cdot y(t)$ sono statisticamente indipendenti sarà $\gamma^2 = 0$ per tutte le frequenze.

Se $\gamma^2 = 1$ i due processi si dicono completamente coerenti.

2. Generalità sui metodi statistici

Le irregolarità di binario sono le cause dei moti parassiti dei veicoli: inoltre in situazioni particolari le oscillazioni laterali delle sale dovute a disallineamenti o ad inclinazioni trasversali possono dar luogo a sollecitazioni inammissibili per la stabilità del binario e pericolose dal punto di vista della sicurezza di marcia; da un lato le forze impulsive possono determinare delle deformazioni permanenti sulla via e dall'altro le reazioni sul telaio del carrello possono provocare sollecitazioni a fatica che ne possono danneggiare la struttura.

Le irregolarità verticali di binario producono vibrazioni particolarmente gravose sugli assili per via delle forze di inerzia delle masse calettate come corpi boccola, dischi freno, ponti, alle quali si può ricondurre la causa dei sovraccarichi dinamici, come verrà dimostrato nel seguito.

Infine i moti parassiti generano vibrazioni in cassa, che sono nocive al comfort dei passeggeri e che danneggiano a fatica strutture e sospensioni.

D'altra parte esse sono inevitabili e debbono essere accettate nei limiti compatibili con costi non esorbitanti di costruzione e di manutenzione dell'armamento: i metodi statistici permettono di tenere conto della presenza delle irregolarità già in fase di progetto e quindi di dimensionare meglio componenti e strutture.

Il secondo aspetto sotto il quale si fa sentire l'influenza del binario sulle prestazioni dinamiche dei veicoli è costituito dalle caratteristiche geometriche delle rotaie, quali profilo ed angolo di posa: questi ultimi sono importanti specie se i cerchioni dei veicoli hanno profilo non conico, perché determinano due tra i principali parametri della dinamica laterale: la conicità ed il richiamo gravitazionale; anche in questo caso la statistica interviene consentendo di valutare tali parametri: per es. al variare dello scartamento e delle ampiezze dei moti laterali di sala.

I procedimenti statistici sono numerosi: quelli utili nel campo in studio sono l'analisi di probabilità, le funzioni di correlazione e quelle spettrali.

Con l'analisi di livello delle irregolarità si ottengono i diagrammi di densità di probabilità: l'esame di essi dimostra che la distribuzione delle irregolarità è, con buona approssimazione, di tipo gaussiano, il che è molto importante, perché le risposte dei sistemi lineari a tali eccitazioni avranno analoghe distribuzioni: questo consente una valutazione rapida sia delle prestazioni dinamiche dei veicoli sia delle sollecitazioni dei componenti, mediante il calcolo delle deviazioni standard relative alle grandezze che interessano, come accelerazioni e tensioni nei materiali.

A questo punto è bene precisare che quanto detto vale per i tratti di linea non interessati da irregolarità localizzate come scambi, intersezioni, deviate che sono da esaminare con metodi non statistici.

Le irregolarità di binario, oltre che avere distribuzione gaussiana o normale, godono, con altrettanta buona approssimazione, delle proprietà di stazionarietà e di ergodicità.

Sono pertanto applicabili i metodi statistici in dinamica ferroviaria, perché i veicoli presentano, nelle condizioni di funzionamento stabile, un comportamento che si può ritenere lineare.

Infatti in generale, se un sistema dinamico, stabile ed avente questa caratteristica, viene sollecitato da una eccitazione di tipo

impulsivo, esso risponde con oscillazioni smorzate (risposta impulsiva).

A titolo di esempio per un sistema costituito da massa-molla-smorzatore ad 1 grado di libertà la cui equazione del moto è

$$m \ddot{W}_2 + k \dot{W}_2 + c W_2 + F = 0 \quad (2.1)$$

la forza impulsiva è rappresentata in fig. 2.1a e la sua espressione analitica è

$$\hat{F} = \int_t^{t+\epsilon} F \cdot dt \quad (2.2)$$

ma poiché $Fdt = m \cdot dv$, l'impulso \hat{F} darà luogo ad una istantanea variazione di velocità senza apprezzabile cambiamento di posizione della massa: le condizioni iniziali da introdurre nel calcolo della oscillazione libera saranno perciò

$$W_0 = 0 \quad \dot{W}_0 = v_0 = \frac{\hat{F}}{m} \quad (2.3)$$

la risposta sarà del tipo (fig. 2.1b)

$$W = \frac{\hat{F}}{m \beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t \quad (2.4)$$

in cui α (< 0) e β sono la parte reale ed immaginaria delle radici della equazione caratteristica.

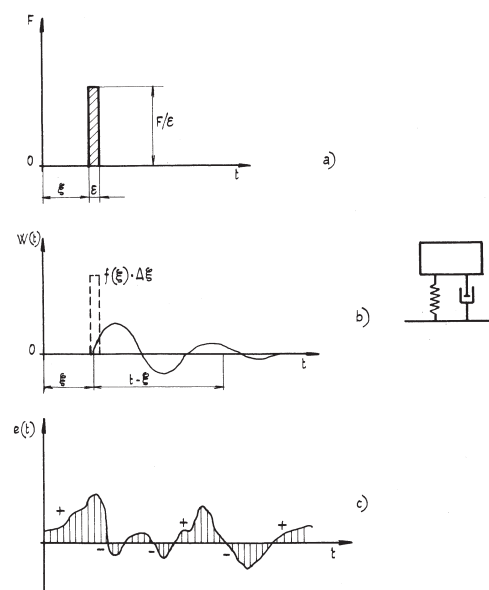


Fig. 2.1 - a) Forza impulsiva - b) Risposta impulsiva di un sistema massa-molla-smorzatore - c) Eccitazione aleatoria, rappresentata come successione di impulsi

Se l'impulso è unitario ($\hat{F} = 1$) la risposta viene indicata con $h(t)$, e quindi in generale per $\hat{F} \neq 1$ sarà $W(t) = \hat{F} \cdot h(t)$.

La funzione $h(t)$ viene denominata risposta impulsiva unitaria o funzione ponderale ed esprime le caratteristiche dinamiche di un sistema lineare a parametri costanti: la sua utilità verrà esaminata più avanti.

Un sistema lineare a parametri costanti può anche essere ca-

ratterizzato dalla "funzione di trasferimento" definita come la trasformata di Laplace $H(p)$ della funzione impulsiva.

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \text{con } p = a + j b \quad (2.5)$$

Questa funzione è importante, perché consente, per i sistemi fisicamente realizzabili, di stabilire un criterio interessante per la stabilità: infatti se $H(p)$ non ha poli nel semipiano reale né sull'asse immaginario, allora il sistema è stabile.

Si abbia ora un sistema di cui sia nota la funzione di trasferimento $H(p)$: ad esso venga applicata una eccitazione o funzione di ingresso $f_i(t)$ qualsiasi.

Normalmente si calcola la risposta $f_o(t)$ nel dominio tempo:

1°) valutando la trasformazione di Laplace di f_i : $[F_i(p)]$;

2°) eseguendo il prodotto $F_o(p) = F_i(p) \cdot H(p)$;

3°) prendendo l'antitrasformata di $F_o(p)$ che è $f_o(t)$.

Può verificarsi il caso che tale procedimento non sia applicabile, per es. se $f_i(t)$ è una funzione aleatoria: in tale situazione si può ottenere la risposta nel dominio tempo $f(t)$ operando sulle due funzioni temporali $f_i(t)$ e $h(t)$: questa è la risposta impulsiva o antitrasformata di $H(p)$: ora la moltiplicazione $F_i(p) \cdot H(p)$ nel campo complesso "p" è equivalente al procedimento di convoluzione nel dominio tempo, che per due funzioni generiche $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ è così definita nel campo $-\infty \leq t < +\infty$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \cdot f_2(t - \xi) \cdot d\xi \quad (2.6)$$

questo integrale prende anche il nome di "integrale di Duhamel".

Applicando tale definizione alle funzioni $f_i(t)$ ed $h(t)$ si ottiene

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\xi) \cdot h(t - \xi) \cdot d\xi \quad (2.7a)$$

che è equivalente alla

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t - \xi) \cdot h(\xi) \cdot d\xi \quad (2.7b)$$

Siccome si suppongono $f_i(t)$ ed $h(t)$ nulle per $t < 0$, i limiti di integrazione possono essere: 0 e t

$$f_o(t) = \int_0^t f_i(\xi) \cdot h(t - \xi) \cdot d\xi = \int_0^t f_i(t - \xi) \cdot h(\xi) \cdot d\xi \quad (2.8)$$

Per questi due integrali si può dare una interpretazione fisica diretta: il primo stabilisce che la risposta $f_o(t)$ in ogni istante può essere determinata mediante un procedimento grafico come quello riportato in figura 2.2a:

1°) si diagrammano le funzioni temporali $f_i(\xi)$ ed $h(\xi)$;

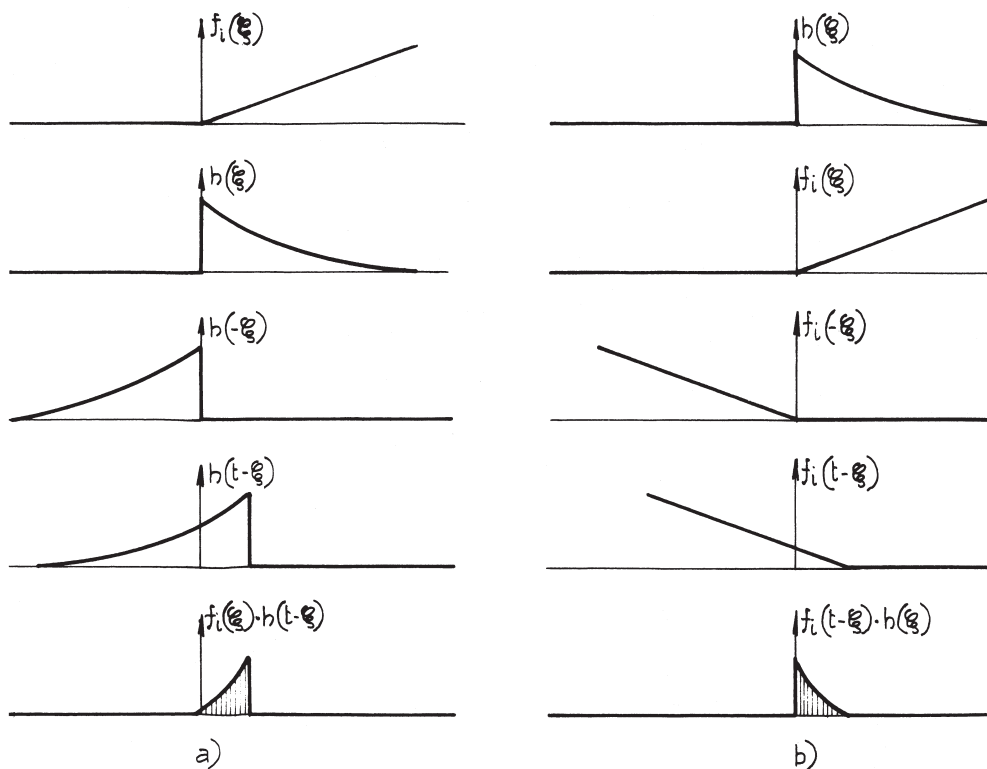


Fig. 2.2 - Soluzioni grafiche dell'integrale di convoluzione

2°) si traccia la funzione simmetrica di $h(\xi)$ rispetto all'asse delle ordinate, cioè la $h(-\xi)$;

3°) si sposta in avanti la $h(-\xi)$ di un tempo t e si ottiene $h(t-\xi)$;

4°) si esegue e si diagramma il prodotto: $f_1(\xi) \cdot h(t-\xi)$;

5°) l'area sotto la funzione prodotto, tratteggiata in fig. 2.2a, rappresenta il valore di $f_0(t)$ o risposta nel tempo.

In questo modo $h(\xi)$, risposta impulsiva nel tempo, può essere considerata come una funzione ponderale: la risposta del sistema $f_0(t)$ in ogni istante dipende dall'eccitazione in quell'istante o da tutte le eccitazioni precedenti: l'importanza delle varie porzioni passate di eccitazione è determinata dalla funzione ponderale.

L'interpretazione di $h(t)$ come funzione ponderale risulta anche evidente dalla seconda forma dell'integrale; in questo caso è la funzione di input f_1 ad essere riflessa e traslata: l'uscita per un qualsiasi istante dipenderà dall'input presente α secondi prima, moltiplicato per il valore della risposta impulsiva $h(\alpha)$, in cui α è compreso tra 0 e t .

In altro modo, data una eccitazione di tipo aleatorio $f(t)$ (fig. 2.1c), essa può essere immaginata come una serie di impulsi, per ognuno dei quali il valore al tempo ξ è: $F = f(\xi) \cdot \Delta \xi$

ed il suo contributo alla risposta totale del sistema nell'istante t , si ottiene sostituendo il tempo t con l'intervallo $(t - \xi)$:

$$f(\xi) \cdot h(t - \xi)$$

Essendo il sistema lineare vale il principio di sovrapposizione e la risposta globale si ottiene appunto sommando i contributi delle singole risposte impulsive.

Di qui anche il nome di integrale di sovrapposizione.

Ora, perché un sistema lineare a parametri costanti sia fisicamente realizzabile, è necessario che esso risponda solo alle eccitazioni passate, il che implica che

$$h(\xi) = 0 \quad \text{per} \quad \xi < 0$$

Quindi per i sistemi fisici il limite inferiore di integrazione è 0, e non $-\infty$.

Un sistema del tipo ora in considerazione si dice "stabile" se qualsiasi eccitazione limitata dà luogo ad una risposta pure limitata.

Se la funzione ponderale del sistema $h(\xi)$ è assolutamente integrabile cioè se

$$h(\xi) \cdot d\xi < \infty$$

allora la risposta sarà limitata ed il sistema sarà stabile.

L'integrale di convoluzione consente anche di dimostrare una proprietà notevole dei sistemi lineari a parametri costanti, e cioè la conservazione della frequenza: infatti si ha che, per una qualsiasi eccitazione $f(\xi)$, la derivata n -esima di $w(t)$ rispetto al tempo è

$$\frac{d^n w(t)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot \frac{d^n f(t-\xi)}{d\xi^n} \cdot d\xi \quad (2.9)$$

ora se $f(t)$ è supposta sinusoidale, cioè $f(t) = A \sin(2\pi ft + \vartheta)$, la derivata seconda è

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -(2\pi f)^2 \cdot f(t) \quad (2.10)$$

perciò anche $w(t)$ deve essere sinusoidale con la stessa frequenza di $f(t)$: quindi un sistema del tipo considerato non può deter-

minare variazioni di frequenza ma può solo modificare ampiezza e fase di una certa eccitazione applicata.

Per i sistemi considerati fisicamente realizzabili e stabili, le caratteristiche dinamiche possono essere descritte anche dalla cosiddetta "funzione di risposta in frequenza $H(f)$ " definita come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau \quad (2.11)$$

(limite inferiore = 0, perché $h(\tau) = 0$ per $\tau < 0$).

Questa funzione assume una grande importanza nei metodi statistici e non è altro che un caso speciale della funzione di trasferimento, in quanto nell'esponente $p = a + jb$, si hanno qui

$$a = 0 \quad b = -2\pi f$$

Una importante relazione per la $H(f)$ si ottiene applicando la trasformazione di Fourier ai due membri dell'integrale di Duhamel

$$\int_0^{\infty} W(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-\xi) \cdot h(\xi) \cdot d\xi \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt \quad (2.12a)$$

ponendo $t - \xi = z$ $t = z + \xi$ $dt = dz$ si ha:

$$\int_0^{\infty} f(z) \cdot e^{-j2\pi fz} \cdot \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{-j2\pi f\xi} \cdot d\xi \cdot dz = H(f) \cdot \int_0^{\infty} f(z) \cdot e^{-j2\pi fz} \cdot dz$$

perché, per definizione $\int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{-j2\pi f\xi} \cdot d\xi = H(f)$ (2.12b)

che è indipendente da z .

Ne deriva infine

$$W(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (2.12)$$

cioè la trasformata di Fourier del sistema $W(f)$ è data dal prodotto della risposta in frequenza del sistema $H(f)$ per la trasformata di Fourier dell'eccitazione.

La $H(f)$ è generalmente una quantità complessa, che si può esprimere in notazione polare

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{-j\Phi(f)} \quad (2.14)$$

dove $H(f)$ è chiamato "fattore di guadagno o di amplificazione"

$\Phi(f)$ è detto "fattore di fase".

Il significato fisico di $H(f)$ è dato dal fatto che essa rappresenta, nel caso di un sistema lineare eccitato con ampiezza costante ed a frequenze crescenti, il variare della risposta al variare dell'eccitazione: si vedranno le applicazioni al paragrafo 4.

Per ragioni fisiche la funzione di risposta in frequenza ed i relativi fattori godono delle seguenti proprietà di simmetria

$$\begin{aligned} H(-f) &= H^*(f) & \text{dove } H^* \text{ è il coniugato complesso di } H \\ |H(-f)| &= |H(f)| \\ \Phi(-f) &= -\Phi(f) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Inoltre, se si hanno due sistemi $H_1(f)$ ed $H_2(f)$ in serie e non ci sono retroazioni tra di loro, la risposta in frequenza totale è descritta da $H(f)$

$$\begin{aligned} H(f) &= H_1 \cdot H_2(f) \\ |H(f)| &= |H_1(f)| \cdot |H_2(f)| \\ \Phi(f) &= \Phi_1(f) + \Phi_2(f) \end{aligned} \quad (2.16)$$

cioè il fattore di guadagno risulta dalla moltiplicazione e quello di fase dalla somma dei fattori parziali. Si noti che $H(f)$ è funzio-

ne solo della frequenza e non del tempo o della eccitazione applicata, perché il sistema è lineare e perché i suoi parametri sono costanti.

Ritornando al sistema di fig. 1b, la trasformata di Fourier della risposta per lo spostamento è

$$W(f) = \int_0^{\infty} W(t) \cdot e^{-2\pi f t} \cdot dt = H(f) \quad (2.17)$$

Per le risposte in frequenza relative a velocità ed accelerazioni si ottengono

$$\dot{W}(f) = \int_0^{\infty} j 2\pi f \cdot W(t) \cdot e^{-2\pi f t} \cdot dt = j 2\pi f \cdot H(f) = j \omega \cdot H(f) \quad (2.18)$$

$$\ddot{W}(f) = \int_0^{\infty} [- (2\pi f)^2] \cdot W(t) \cdot e^{-2\pi f t} \cdot dt = - (2\pi f)^2 \cdot H(f) = - \omega^2 \cdot H(f) \quad (2.19)$$

Quanto esposto vale anche per i sistemi a molti gradi di libertà, quali, si possono considerare i veicoli ferroviari, con risposta impulsiva generica $h(t)$; per la generica variabile $y(t)$ la risposta per una singola eccitazione aleatoria $x(t)$ sarà

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau \quad (2.20)$$

Nei fenomeni statistici le funzioni di eccitazione non sono note nella forma temporale $x(t)$ ma come funzioni di tipo spettrale che operano nel campo delle frequenze: il passaggio dalla prima alla seconda forma avviene attraverso le funzioni di correlazione della risposta y in cui ancora compaiono la risposta impulsiva $h(t)$ e la funzione eccitante $x(t)$, questa già come funzione di autocorrelazione. Per quest'ultima, si ottiene per definizione, ed applicando la (2.20)

$$y(t) \cdot y(t + \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot x(t - \xi) \cdot d\xi \cdot h(\eta) \cdot x(t + \tau - \eta) \cdot d\eta$$

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot h(\eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \right] \cdot$$

$$x(t - \xi) \cdot x(t + \tau - \eta) \cdot dt$$

l'espressione in [] è indipendente da t , per cui si può scrivere

$$R_y(\tau) = \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot h(\eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \right] \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \xi) \cdot x(t + \tau - \eta) \cdot dt$$

ma

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \xi) \cdot x(t + \tau - \eta) \cdot dt = R_x[(t + \tau - \eta) - (t - \xi)] = R_x(\tau + \xi - \eta)$$

per cui

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot h(\eta) \cdot R_x(\tau + \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2.21)$$

Si applichi ora la trasformazione di Fourier ad $R_y(\tau)$ e si otterrà la funzione autospettrale di y [$S_y(f)$]

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) \cdot e^{-2\pi f \tau} \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi f \tau} \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot h(\eta) \cdot R_x(\tau + \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\tau \end{aligned}$$

ponendo $\tau + \xi - \eta = s$ per cui $d\tau = ds$

e ponendo inoltre $\tau = s + (\eta - \xi)$, si ha

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \int_0^{\infty} R_x(s) \cdot e^{-2\pi f s} \cdot ds \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot h(\eta) \cdot e^{-2\pi f (\eta - \xi)} \cdot d\xi \cdot d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(s) \cdot e^{-2\pi f s} \cdot ds \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{+2\pi f \xi} \cdot h(\eta) \cdot e^{-2\pi f \eta} \cdot d\xi \cdot d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(s) \cdot e^{-2\pi f s} \cdot ds \cdot H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(s) \cdot e^{-2\pi f s} \cdot ds \quad (2.22) \end{aligned}$$

[NB. $H(f) = \alpha + j\beta$, $H^*(f) = \alpha - j\beta$, quindi $H(f) \cdot H^*(f) = \alpha^2 + \beta^2 = |H|^2$]

Ne risulta

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad (2.23)$$

Secondo questa relazione la risposta spettrale S_y di un sistema ad una eccitazione di cui sia noto l'autospettro S_x , si ottiene moltiplicando quest'ultimo per il quadrato del modulo relativo alla risposta in frequenza.

Qualora si volessero le densità spettrali per la velocità o l'accelerazione della risposta y , ricordando che

$$H_y(f) = \omega \cdot H_f(f) \quad \text{ed} \quad H_y(f) = -\omega^2 \cdot H_f(f) \quad (2.24)$$

si ottengono le relazioni

$$S_y(f) = (2\pi f)^2 \cdot S_f(f)$$

$$S_y(f) = (2\pi f)^4 \cdot S_f(f)$$

Per le funzioni di correlazione e spettro incrociato il procedimento è analogo: infatti la funzione di correlazione incrociata $R_{xy}(\tau)$ tra una funzione di ingresso o di eccitazione $x(t)$ ed una funzione di risposta $y(t + \tau)$, viene derivata dalle relazioni (2.25)

$$x(t) \cdot y(t + \tau) = \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot x(t) \cdot (t - \xi + \tau) \cdot d\xi$$

$$\text{(poichè } y(t + \tau) = \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot x(t - \xi + \tau) \cdot d\xi) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot x(t) \cdot x(t + \tau - \xi) \cdot d\xi \cdot dt = \\ &= \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot R_x(\tau - \xi) \cdot d\xi \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{poichè } \int_0^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau - \xi) \cdot dt = R_x(\tau - \xi)$$

Lo spettro incrociato è la trasformata di Fourier di $R_{xy}(\tau)$

$$\begin{aligned} S_{xp}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xp}(\tau) \cdot e^{-2\pi f \tau} \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi f \tau} \cdot \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot R_x(\tau - \xi) \cdot d\xi \cdot d\tau \end{aligned} \quad (2.27)$$

posto $\tau - \xi = q$ si hanno $d\tau = dq$, $\tau = q + \xi$ e quindi

$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi f q} \cdot \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{-2\pi f \xi} \cdot R_x(q) \cdot dq \cdot d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(q) \cdot e^{-2\pi f q} \cdot dq \cdot \int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{-2\pi f \xi} \cdot d\xi \cdot d\xi \quad (2.28) \end{aligned}$$

ma poichè

$$\int_0^{\infty} h(\xi) \cdot e^{-2\pi f \xi} d\xi = H(f) \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(q) \cdot e^{-2\pi f q} \cdot dq = S_x(f)$$

si ottiene infine

$$S_{xy}(f) = H(f) \cdot S_x(f) \quad (2.29)$$

cioè lo spettro incrociato $S_{xy}(f)$ fra le funzioni di ingresso e di uscita è pari al prodotto della funzione di risposta in frequenza $H(f)$ per lo spettro di ingresso $S_x(f)$.

Pertanto dopo il rilievo sperimentale e l'elaborazione analitica della caratteristica spettrale d'eccitazione, tipica per ciascuna delle irregolarità di binario e variabile da linea a linea, dopo il calcolo della risposta in frequenza del veicolo per un generico moto si può calcolare la risposta spettrale già in sede di progettazione, e ciò consente l'ottimizzazione delle sospensioni: è bene sottolineare però la necessità di disporre di spettri che caratterizzino il binario senza i quali si deve rinunciare a priori ad un metodo di calcolo veramente efficace.

3. Il binario

Da lungo tempo sono in servizio presso le principali reti ferroviarie vetture speciali cosiddette "di misura" dotate di attrezzature ed apparecchiature per il controllo dello stato del binario: scopo essenziale è quello di rilevare rapidamente ed in modo sistematico le principali grandezze che caratterizzano la geometria del binario, al fine di decidere gli interventi per la manutenzione.

Fino ad un decennio orsono le apparecchiature erano di tipo esclusivamente meccanico, mentre la tendenza attuale è di introdurre ovunque possibile dei trasduttori elettrici, i cui segnali sono più facili da manipolare.

Le grandezze fondamentali registrate sono:

- 1) livellamento verticale delle due rotaie;
- 2) allineamento orizzontale per le due rotaie;
- 3) scartamento;
- 4) sghebbio di binario su di una base fissa;
- 5) inclinazione trasversale o dislivello fra le due rotaie;

esse costituiscono l'origine dei moti parassiti dei veicoli: scopo delle registrazioni è quello di controllare che i loro valori restino compresi entro le tolleranze prestabilite dai Servizi Lavori delle varie amministrazioni per garantire un servizio regolare.

L'esame delle registrazioni viene fatto per lo più a vista in linea durante le corse di controllo per individuare le zone con particolari anomalie e definire i lavori di manutenzione; tuttavia già nel decennio 1960-70, in parallelo e come conseguenza degli studi di dinamica ferroviaria, emerse la necessità di approfondire la conoscenza delle caratteristiche geometriche del binario che costituisce insieme con il veicolo il sistema dinamico ferroviario.

A tale scopo s'iniziò l'analisi al calcolatore dei dati, registrati su nastro magnetico, con metodi statistici e fra le analisi di probabilità o meglio di distribuzione delle irregolarità, di correlazione e di tipo spettrale fu quest'ultima a dimostrarsi come la più completa e la più adatta ad esprimere la "qualità" di un certo binario [5 e 6].

La rappresentazione delle irregolarità di binario mediante spettri di densità di potenza delle stesse, offre due vantaggi principali:

1°) essa permette una generalizzazione nel senso che linee con profili individuali differenti ma posate con materiale simile e con

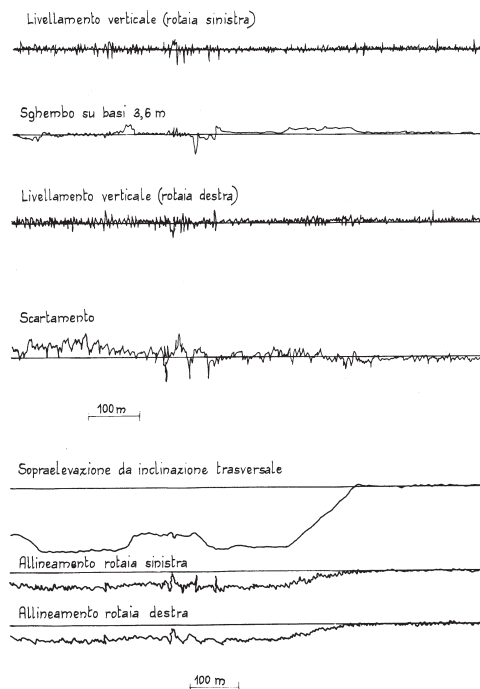


Fig. 3.1 - Tratto tipico di registrazioni caratteristiche di binario con vettura di misura

analoghi metodi di manutenzione avranno con molta probabilità caratteristiche di tipo statisticamente simili;

2°) essa riassume in modo sintetico le proprietà in esame e fornisce i dati di binario in forma immediatamente utilizzabile come segnali di input per il modello matematico binario-veicolo.

È opportuno ripetere che questa rappresentazione non fornisce indicazione su difetti isolati che devono essere individuati per altra via.

Diagrammi spettrali tipici sono riportati nelle figure 3.2: in essi la variabile indipendente è la lunghezza d'onda λ (m) oppure la fre-

quenza spaziale $F = \frac{1}{\lambda}$ [m^{-1}] cioè il numero di lunghezze d'onda per

metro lineare, oppure la pulsazione spaziale $\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{\lambda}$

Le amministrazioni ferroviarie più avanzate in questo campo sono quella giapponese ed in Europa, quelle francese, tedesca ed inglese; è auspicabile che anche in Italia vengano elaborati questi elementi statistici perché per gli studi dinamici la conoscenza di tali proprietà statistiche del binario è altrettanto importante quanto quella delle proprietà meccaniche o quella relativa ai profili delle rotaie e dei cerchioni.

Si deve però ancora osservare che molti problemi restano da risolvere in questo campo.

1°) Si deve confermare la validità dei metodi di rilievo e valutare gli errori che risultano nell'analisi spettrale;

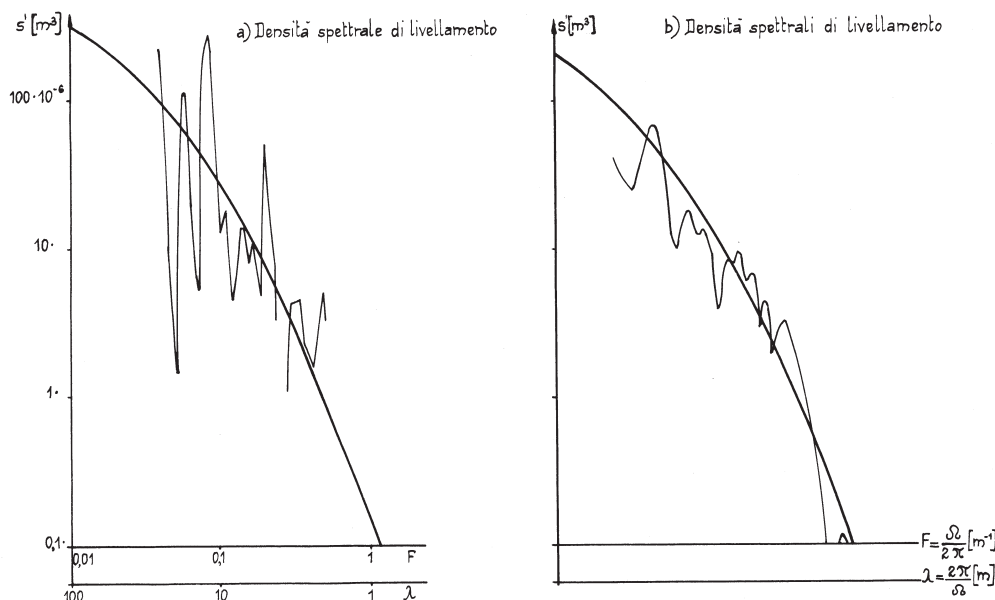


Fig. 3.2 – Diagrammi spettrali tipici: F = Frequenza spaziale; λ = Lunghezza d'onda

2°) Si deve valutare il grado di risoluzione ottenibile con sicurezza per identificare i picchi ed altri particolari della forma degli spettri;

3°) Si deve definire l'influenza precisa dei seguenti parametri: carichi d'asse, configurazione degli assi, velocità di misura; contemporaneamente alle misure geometriche occorrono misure di rigidità e di smorzamenti del binario;

4°) Mancano ancora dati sulle proprietà del profilo trasversale delle rotaie lungo il binario; la loro importanza si fa sentire sulle condizioni di conicità e di richiamo gravitazionale, specie per profili di cerchioni a curvatura variabile;

5°) Si deve estendere il campo nel dominio delle grandi e delle piccole lunghezze d'onda, cioè per valori maggiori di 60-80 m e minori di 1 m circa: le prime sono necessarie per treni in marcia a velocità superiori a 180-200 Km/h e le altre in generale perché legate ai problemi della rumorosità e dell'usura ondulatoria;

6°) Occorre una classificazione dei risultati di misura: cioè è opportuna la presentazione sia di spettri medi sia di spettri limite superiori ed inferiori per le diverse categorie di binario. A volte è utile una espressione analitica della densità di potenza dell'irregolarità per rendere più rapidi i calcoli, specie se si tratta di eseguire confronti fra diverse soluzioni: tuttavia per calcoli più precisi l'uso di spettri con i loro picchi e valli è più corretto perché in questo modo non vanno perduti gli effetti di particolari risonanze tra binario e veicolo;

7°) È necessario che oltre gli spettri normali o autospettri, siano elaborati spettri incrociati perché necessari nei casi di eccitazioni multiple del binario sui veicoli.

4. Il veicolo [12, 14, 15, 16, 17, 18, 19]

La pratica indipendenza dei moti verticali da quelli sul piano orizzontale per via della simmetria dei veicoli, rende possibile l'illustrazione rapida del metodo di calcolo con riferimento ad un semplice modello di veicolo relativo ai moti verticali: esso consentirà anche di comprendere l'importanza della conoscenza e della introduzione nei modelli matematici della elasticità di binario per una miglior corrispondenza dei calcoli teorici ai risultati sperimentali.

Si studino per esempio le vibrazioni verticali del baricentro di una cassa nell'ipotesi di spostamenti verticali della base: in questo semplice modello si possono riunire le masse dei due carrelli cosicché considerando il binario rigido si avrà un sistema (a) a 2 gradi di libertà, che diventeranno 3 (b) introducendo elasticità e smorzamento di binario e la massa equivalente sale-rotaie-traversine [(fig. 4.1a) b)].

I sistemi di equazioni si deducono rapidamente applicando le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (4.1)$$

previo il calcolo di energia cinetica T e potenziale V e della funzione P di Rayleigh (o dissipativa).

a) Sistema a 2 gradi di libertà

$$T = \frac{1}{2} M^* \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} M^* Z^2$$

$$U = \frac{1}{2} c^* (Z^* - Z^+)^2 + \frac{1}{2} c^+ (Z^+ - Z)^2 \quad (4.2)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} K^* (Z^* - Z^+)^2 + \frac{1}{2} 2 K^+ (Z^+ - Z)^2$$

C^* c^* K^* k^* rigidzze e coefficienti di smorzamento primari e secondari

$$M^* \ddot{Z}^* + K^* (Z^* - Z^+) + c^* (Z^* - Z^+) = 0$$

$$2M^+ \ddot{Z}^+ + 2K^* (Z^+ - Z^*) + 2c^* (Z^+ - Z) + 2c^+ (Z^+ - Z) = 0 \quad (4.3)$$

si tratta delle classiche equazioni differenziali del doppio oscillatore, con cui si studia la risposta di cassa e carrello ad una eccitazione armonica da parte delle sale che seguono perfettamente un binario con deformazioni sinusoidali di lunghezze d'onda variabili ed ampiezza costante unitaria. Infatti per le successive elaborazioni statistiche è necessario conoscere la risposta in frequenza del sistema.

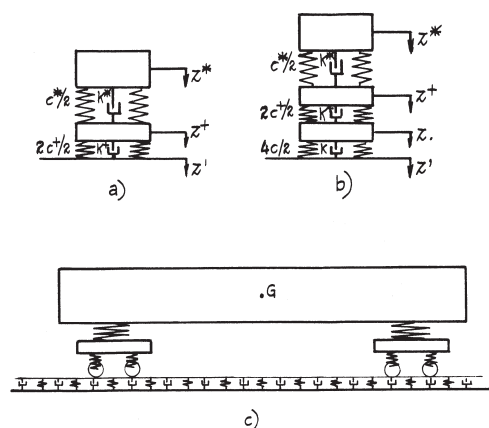


Fig. 4.1 - Schemi di oscillatori doppio (a) e triplo (b). Schema di veicolo a 2 carrelli biassi (c)

La funzione eccitante è

$$Z = a \cdot \sin \omega t \quad \text{con} \quad \omega = 2 \pi \cdot f = \frac{2 \pi V}{\lambda}$$

Per il calcolo della risposta in frequenza si applica la trasformazione di Fourier al sistema di equazioni differenziali e si ottiene

$$-\omega^2 M^* \cdot F(Z^*) + j \omega K^* \cdot F(Z^*) + c^* \cdot F(Z^*) + j \omega K^* \cdot F(Z^+) + c^* \cdot F(Z^+) = 0$$

$$+ j \omega K^* + c^* \cdot F(Z^+) - \omega^2 2 M^+ \cdot F(Z^+) + j \omega (K^* + 2 K^+) + (c^* + 2 c^+) \cdot F(Z^+) = (j \omega 2 K^+ + 2 c^+) \cdot F(Z)$$

$$- \omega^2 M \cdot F(Z) + j \omega K \cdot F(Z) + c \cdot F(Z) = 0 \quad (4.4)$$

ne risultano

$$H^*(\omega) = \frac{F(Z^*)}{F(Z)} = \frac{\Delta^*}{\Delta} \quad H^+(\omega) = \frac{\Delta^+}{\Delta} \quad (4.5)$$

dove

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} 0 & j \omega K^* + c^* \\ j \omega 2 K^+ + 2 c^+ & c^* + 2 c^+ + j \omega (K^* + 2 K^+) - \omega^2 2 M^+ \end{vmatrix} \quad (4.6a)$$

$$\Delta^+ = \begin{vmatrix} -\omega^2 M^* + j \omega K^* + c^* & 0 \\ j \omega K^* + c^* & j \omega 2 K^+ + 2 c^+ \end{vmatrix} \quad (4.6b)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 M^* + j \omega K^* & j \omega K^* + c^* \\ j \omega K^* + c^* & -\omega^2 2 M^+ + j \omega (K^* + 2 K^+) + (c^* + 2 c^+) \end{vmatrix} \quad (4.6c)$$

b) Sistema a 3 gradi di libertà

$$T = \frac{1}{2} M^* \dot{Z}^{*2} + \frac{1}{2} 2 M^+ \dot{Z}^{+2} + \frac{1}{2} 4 M \dot{Z}^2$$

$$U = \frac{1}{2} c^* (Z^* - Z^+)^2 + \frac{1}{2} 2 c^+ (Z^+ - Z)^2 + \frac{1}{2} 4 c (Z - Z')^2 \quad (4.7)$$

$$P = \frac{1}{2} K^* (Z^* - Z^+)^2 + \frac{1}{2} 2 K^+ (Z^+ - Z)^2 + \frac{1}{2} 4 k (Z - Z')^2$$

dove c k sono la rigidzza ed il coefficiente di smorzamento per ogni sala; il sistema di equazioni differenziali diventa

$$M^* \ddot{Z}^* + K^* (Z^* - Z^+) + c^* (Z^* - Z^+) = 0$$

$$2 M^+ \ddot{Z}^+ + 2 K^* (Z^+ - Z^*) + 2 c^* (Z^+ - Z^*) + 2 K^+ (Z^+ - Z) + 2 c^+ (Z^+ - Z) = 0 \quad (4.8)$$

$$4 M \ddot{Z} + 2 K^+ (Z - Z^+) + 2 c^+ (Z - Z^+) + 4 K (Z - Z') + 4 c (Z - Z') = M \ddot{Z}'$$

Le risposte in frequenza per i due casi sono riportate nelle figg. 4.2 e 5.4: È evidente che nel primo caso si perde ogni informazione nel campo delle frequenze superiori a $15 \div 20$ Hz.

Tuttavia si deve osservare che tali risposte non sono adeguate alla realtà perché non è corretta l'ipotesi che le quattro sale siano eccitate in fase tra loro: in realtà nella marcia in linea le irregolarità vengono incontrate in successione dalla sala con ritardi che dipendono dal passo dei carrelli ($2 a^*$) dall'interperno di cassa ($2 a^*$) e dalla velocità di marcia

$$\frac{2 a^*}{V}, \frac{2 a^*}{V}, \frac{2 (a^* + a^*)}{V}$$

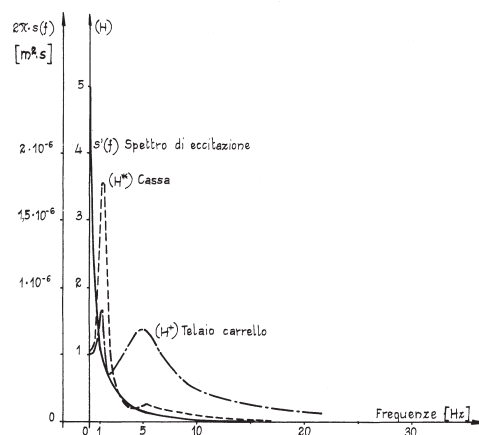


Fig. 4.2 - Risposte in frequenza per oscillatore doppio di fig. 4.1 a)

sono i valori dei ritardi in secondi del 2°, 3°, 4° asse rispetto al 1°.

È facile tenere conto di questo [11], quando si studia la risposta nel baricentro di cassa considerando separatamente i rapporti $|H^*(\omega)|$

relativi a ciascuno dei 4 assi: data la simmetria del sistema si ha

$$|H_1| = |H_2| = |H_3| = |H_4| = |H| \quad (4.9)$$

Le trasformate di Fourier per gli spostamenti verticali in mezz'era sono

$$F(Z^*) = H_1 \cdot F(Z'_1) + H_2 \cdot F(Z'_2) + H_3 \cdot F(Z'_3) + H_4 \cdot F(Z'_4) = \\ = H [F(Z'_1) + F(Z'_2) + F(Z'_3) + F(Z'_4)] \quad (4.10)$$

La risposta in frequenza sarà data da

$$H^*(\omega) = \frac{F(Z^*)}{F(Z_i)} = \frac{\Delta^*}{\Delta} \cdot \frac{F(Z^*)}{F(Z_i)} = \frac{\Delta^*}{\Delta}; \quad (4.11)$$

in cui $F(Z_i)$ è la trasformata di Fourier della funzione eccitante dell'asse iesimo.

Ora le quattro eccitazioni sono uguali tra loro in ampiezza ma sfasate come sopra indicato, per cui

$$Z_2(t) = Z_1\left(t - \frac{2a^+}{V}\right) \quad Z_3(t) = Z_1\left(t - \frac{2a^*}{2}\right) \quad Z_4(t) = Z_1\left(t - \frac{2a^+ + 2a^*}{V}\right); \quad (4.12)$$

ne segue:

$$F(Z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_2(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_1\left(t - \frac{2a^+}{V}\right) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt.$$

Ponendo:

$$t_1 = t - \frac{2a^+}{V} \quad dt_1 = dt, \quad \text{si ha} \quad t = t_1 + \frac{2a^+}{V} \quad \text{e quindi}$$

$$F(Z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_1\left(t_1 + \frac{2a^+}{V}\right) \cdot e^{-j\omega\left(t_1 + \frac{2a^+}{V}\right)} \cdot dt_1 = e^{-j\omega\frac{2a^+}{V}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} Z_1(t_1) \cdot e^{-j\omega t_1} \cdot dt_1$$

e cioè

$$F(Z_2) = e^{-j\omega\frac{2a^+}{V}} \cdot F(Z_1) \quad (4.13)$$

Analogamente si otterranno

$$F(Z_3) = e^{-j\omega\frac{2a^*}{V}} \cdot F(Z_1) \quad F(Z_4) = e^{-j\omega\frac{2a^+ + 2a^*}{V}} \cdot F(Z_1) \quad (4.14)$$

Sostituendo nella espressione di $F(Z^*)$ si ottiene

$$F(Z^*) = H \cdot \left(1 + e^{-j\omega\frac{2a^+}{V}} + e^{-j\omega\frac{2a^*}{V}} + e^{-j\omega\frac{2a^+ + 2a^*}{V}}\right) \cdot F(Z_1) \quad (4.15)$$

Nei calcoli di risposte spettrali compare sempre il termine $|H|^2$ per cui nel nostro caso

$$|H^*|^2 = \left|\frac{F(Z^*)}{F(Z_1)}\right|^2 = |H|^2 \cdot \left(1 + e^{-j\omega\frac{2a^+}{V}} + e^{-j\omega\frac{2a^*}{V}} + e^{-j\omega\frac{2a^+ + 2a^*}{V}}\right)^2 = \\ = |H|^2 \cdot 2 \cdot \left(1 + \cos\frac{2a^+}{V}\omega\right) \cdot 2 \cdot \left(1 + \cos\frac{2a^*}{V}\omega\right) \cdot e^{-j\omega\left(\frac{2a^+}{V} + \frac{2a^*}{V}\right)} = |H|^2 \cdot \chi$$

in cui χ assume il significato di coefficiente di modulazione del quadrato di $|H|$: esso è funzione di $2a^+$, $2a^*$, V [11].

Nelle figure 4.3 abc e 4.4bc sono rappresentate le funzioni parziali e totali del coefficiente di modulazione per due valori della velocità nel caso di passo 2,5 m e di interperno 19 m.

In Fig. 4.3d e 4.4d sono riportate le risposte in frequenza in centro cassa per i due sistemi con e senza coefficienti di modulazione.

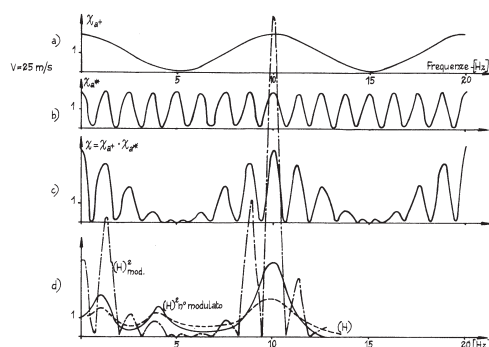


Fig. 4.3 - Coefficienti di modulazione a) b) c) e confronto d) risposte in frequenza con e senza modulazione

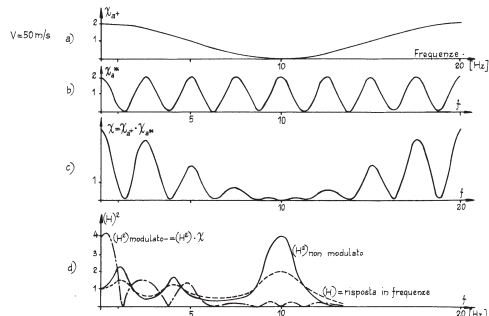


Fig. 4.4 - Coefficienti di modulazione a) b) c) e confronto d) risposte in frequenza con e senza modulazione

È evidente come esso modifichi sensibilmente la risposta stessa e spiega la comparsa nelle registrazioni e negli spettri di picchi che non hanno nulla da vedere con la frequenza dei modi propri di vibrare. Naturalmente i picchi più alti delle risposte si avranno dove coincidono i massimi delle irregolarità, della risposta in frequenza e del coefficiente totale di modulazione.

I calcoli si conducono in modo analogo per il beccheggio e per i moti composti, oppure per i modelli più complessi in cui si tiene conto della flessibilità della cassa; altrettanto vale per le risposte in frequenza per i moti laterali, di rollio e di serpeggio, per i quali vale anche il concetto di modulazioni in funzione di passo di interperno e di velocità, con l'ulteriore complicazione dovuta al fatto che le frequenze dei modi di vibrare delle sale sono funzioni, quasi lineari nel campo stabile, della velocità.

5. Calcoli statistici in dinamica

Esaminate nei paragrafi 3 e 4 le proprietà statistiche del binario e le risposte in frequenza dei veicoli, si vedrà ora come vengono impiegate insieme ai fini dell'analisi teorica delle prestazioni dinamiche dei veicoli; per essa è necessario poter disporre degli spettri di binario: nelle figure 5.1, 5.2, 5.3, ne sono riportati alcuni tipici derivati dalla letteratura tecnica.

Le figure 5.1, 5.2 e 5.3 rappresentano alcuni tipici spettri di livellamento e di allineamento.

A molti di questi diagrammi è sovrapposta la curva media generalmente esprimibile con una funzione analitica che facilita notevolmente i calcoli: come già si è detto, accertata la validità dello spettro, i calcoli con il diagramma reale sono più precisi.

Come già si è visto al paragrafo 3 i diagrammi spettrali sono rappresentati in funzione della frequenza spaziale F o della pulsazione spaziale $\Omega (= 2\pi F)$: la densità spettrale è quindi funzione spaziale del tipo

$$s'_{wo}(\Omega) = f(\Omega) \quad (5.1)$$

Nel calcolo tuttavia è necessario esprimerla in funzione della frequenza o pulsazione temporale, in quanto che al variare della velocità di marcia, a parità di lunghezza d'onda λ la frequenza temporale f varia con la velocità: $f = v/\lambda$.

Pertanto la densità spettrale temporale sarà espressa dalla relazione

$$s'_{wo}(\omega) = \frac{1}{V} \cdot s'_{wo} \frac{\omega}{V} = \frac{1}{V} s'_{wo} \left(\frac{2\pi}{V} f \right) \quad (5.2)$$

Si è già visto al paragrafo 3 come si calcolano le risposte spettrali in spostamento, pari al prodotto della densità spettrale d'eccitazione s_w per il quadrato del modulo di amplificazione relativo allo spostamento; se ulteriormente moltiplicati per ω^2 e ω^4 , si ottengono le risposte rispettivamente per velocità ed accelerazioni.

In figura 5.4 sono riportati, in funzione della frequenza, i diagrammi dei moduli di risposta in frequenza per sala, carrello e cassa relativi al modello a tre gradi di libertà illustrato al paragrafo 4: sovrapposto è lo spettro medio della densità spettrale d'eccitazione verticale per la linea di Vierzon-Les Aubrais della figura 5.1. Nella successiva figura sono riportate le risposte spettrali in accelerazione (senza modulazione) per sala carrello e cassa.

Ricordando che $\sigma_w^2 = 2 \int_0^\infty s'_{wo}(f) \cdot df$ dall'area del diagramma si ottengono rapidamente la varianza e la deviazione standard σ_w che coinciderà con il valore efficace di una data grandezza, quando il suo valore medio è nullo.

La conoscenza della deviazione standard σ è molto utile sotto diversi aspetti: per esempio la σ degli spostamenti relativi sala-binario, se è noto il gioco medio, dà una idea della probabilità che ad una certa velocità ci siano urti del bordino contro la rotaia; la σ delle velocità relativa sala-carrello o carrello-sala sono un indi-

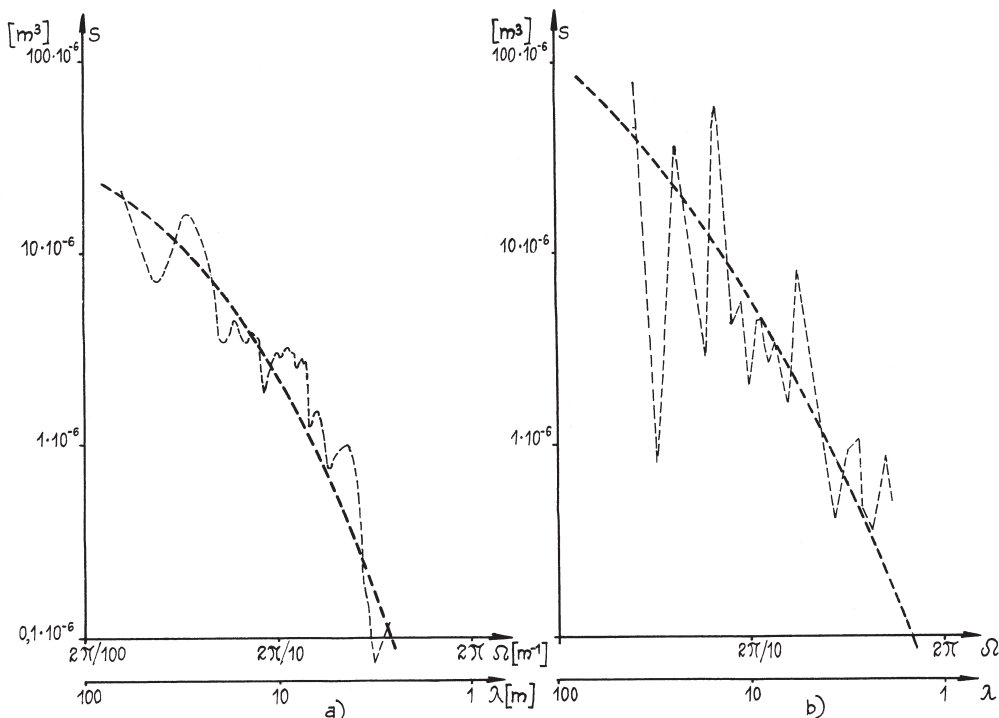


Fig. 5.1 - Spettri di livellamento e di allineamento

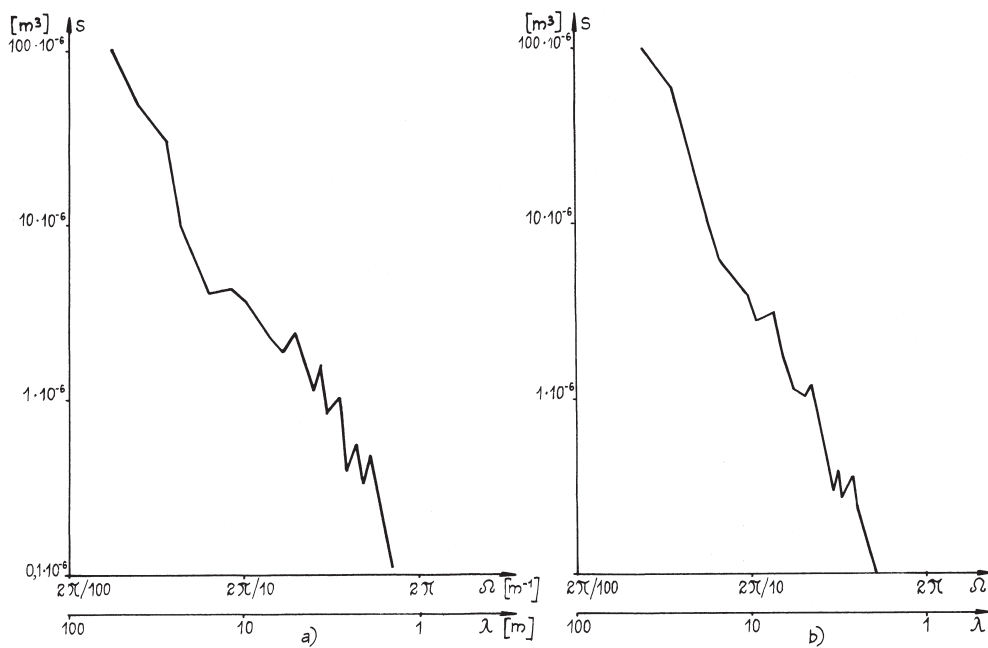


Fig. 5.2 - Spettri di livellamento e di allineamento

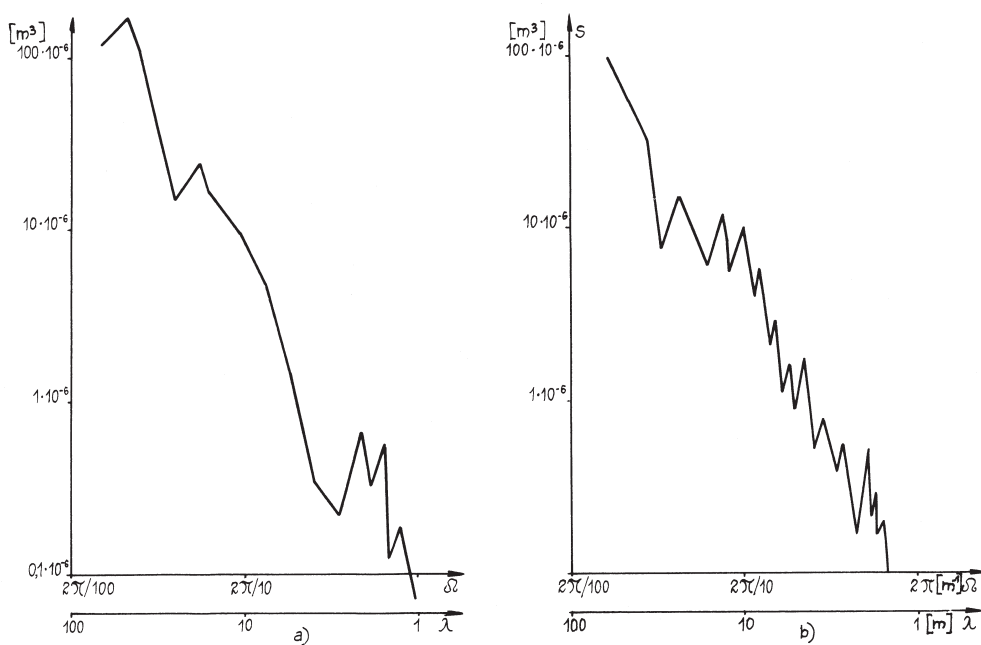


Fig. 5.3 - Spettri di livellamento e di allineamento

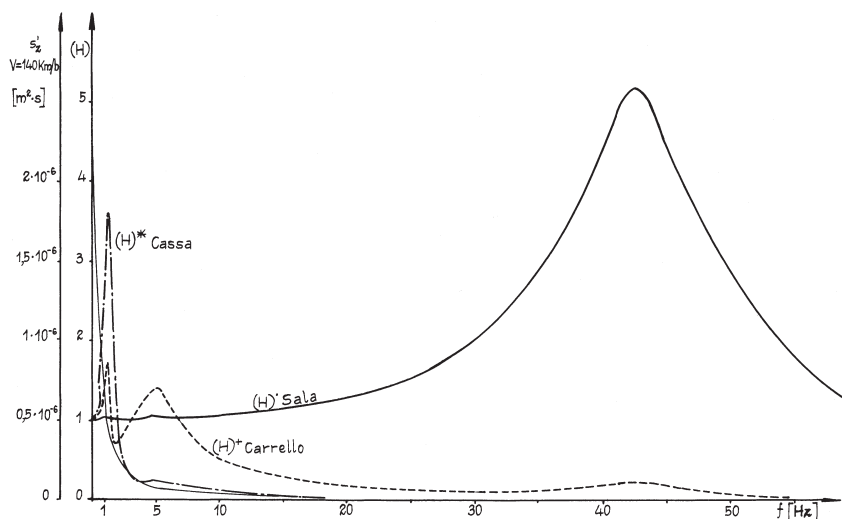


Fig. 5.4 - Risposta in frequenza per oscillatore triplo e spettro di eccitazione

ce delle sollecitazioni nelle sospensioni primarie e secondarie ed in particolare servono a valutare l'energia dissipata negli smorzatori che costituiscono la parte più delicata della sospensione e che quindi possono essere dimensionati con maggior accuratezza; terzo ed importantissimo caso di applicazioni riguarda l'accelerazione delle masse montate sulle sale perché le forze d'inerzia (o sovraccarichi dinamici) costituiscono la causa principale delle sollecitazioni a fatica dell'assile nella marcia in rettilineo.

Nel seguito verranno esposti i risultati dei calcoli relativi ai moti verticali per tre tipi di veicoli, al variare dei parametri costruttivi fondamentali come rigidità e smorzamento del binario, o dati di funzionamento come la velocità di marcia.

I veicoli considerati sono: elettrotreno ad alta velocità (250 Km/h), carrozze per treni ad alte velocità (fino a 200 Km/h) e locomotiva diesel elettrica.

Il modello usato è quello a tre gradi di libertà, nel quale si è tenuto conto di:

1°) massa equivalente di binario;

2°) tre valori per la rigidità (50, 100, 150 · 10⁶ N/m) } per la rotaia
3°) tre valori di rapporto di smorzamento (5 - 10 - 20%)

Come spettri di eccitazione sono stati applicati quelli di fig. 5.1, relativo a linea di ottima qualità, per il quale l'espressione analitica è la seguente

$$S = \frac{2004 \cdot 10^{-6}}{(0,36 + \Omega^2)^3} \text{ [m}^3\text{]} \quad (5.3)$$

Dal confronto tra i vari tipi si è visto che per linee buone o mediocri può valere la stessa espressione moltiplicata rispettivamente per 1,5 e 2,5.

I risultati sono stati diagrammati e riportati nelle figure 5.6 ÷ 5.8: l'influenza delle caratteristiche meccaniche del binario (rigidità e smorzamento) si vede nelle figure 5.6 e 5.7 per il veicolo ad alta velocità e per linea ottima: nella prima sono rappresentate le deviazioni standard delle accelerazioni verticali per sala-carrello-cassa in funzione della velocità, al variare della rigidità e per smorzamento del 20%; l'andamento dei diagrammi indica una relazione quasi lineare tra deviazione standard e velocità: la rigidità influisce quasi per nulla sulla cassa, poco sul carrello e molto sulle sale.

Nella seconda figura sono rappresentate le deviazioni standard per i 3 componenti al variare dello smorzamento di binario (20-10-15%) per rigidità media di binario 10.10⁶ kg/m: ancora nulla è l'influenza sulla cassa, e relativamente modeste su carrello e sala.

Nella fig. 5.8 si vede l'influenza del livellamento di binario (linea ottima, buona e mediocre) sulle deviazioni standard della sala, del carrello e della cassa.

Nella tabella I sono raccolti i risultati più significativi, riguardanti le deviazioni standard per le accelerazioni verticali in cassa, carrello e sale per i tre veicoli sopra ricordati e per le rispettive velocità nominali; i parametri sono: rigidità di binario e qualità di livellamento.

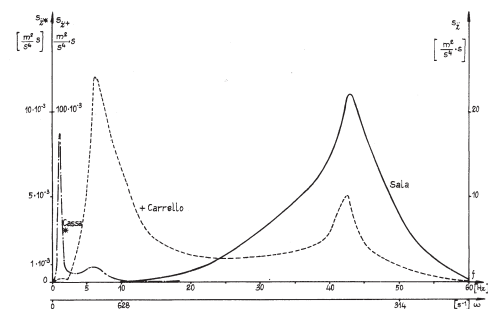


Fig. 5.5 - Risposta spettrale per oscillatore triplo di fig. 4.1 b

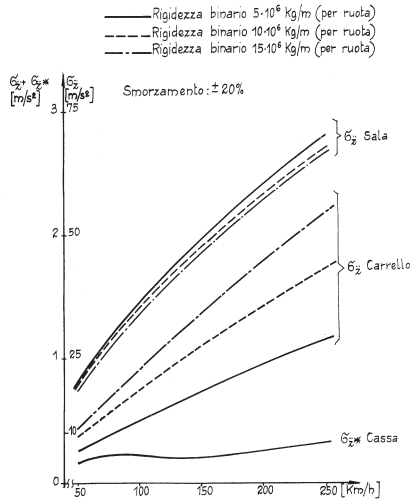


Fig. 5.6 - Influenza della rigidità di binario sui moti verticali

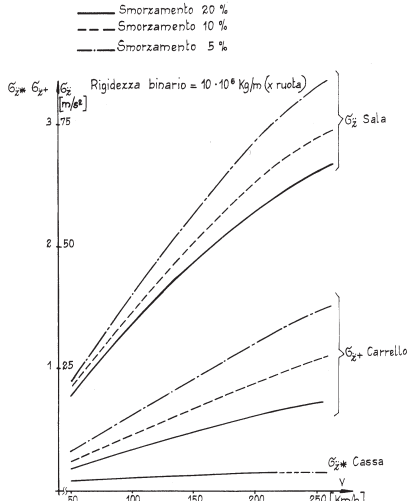


Fig. 5.7 - Influenza dello smorzamento di binario sui moti verticali

Deviazioni standard in m/s²

TABELLA I

	Elettrotreno		Carrozze		Loco D.E.		Binario		
							Rigidezza	Smorz. %	
σ_z cassa	0,3	0,75	0,24	0,6	0,4	1	$5 \cdot 10^6$	Kg/m Kg/m Kg/m Kg/m	20
σ_z carrello	2,75	7	1,08	2,75	1,2	3	$5 \cdot 10^6$		
σ_z sale	30	75	26	65	11	27,5	$5 \cdot 10^6$		
	56	138	46	115	22	55	$15 \cdot 10^6$		
<div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>↑</div><div>└───┐</div></div><div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div><div>└───┐</div></div><div>Linee mediocri</div><div>Linee ottime</div></div>									

TABELLA II

	ELETTROTRENO		CARROZZE		LOCO D.E.		
sale (m/s²)	30	56	26	46	11	22	linee ottime
	75	138	65	115	27,5	55	linee mediocri
rig. rot. 5 · 10 ⁶							smorzamento 20%
rig. rot. 15 · 10 ⁶							

TABELLA III

λx	Probabilità	ELETTROTRENO		CARROZZE		LOCO D.E.	
1	68%	0 ÷ 0,3	0 ÷ 0,75	0 ÷ 0,24	0 ÷ 0,6	0 ÷ 0,4	0 ÷ 1
2	27,1%	0,3 ÷ 0,6	0,75 ÷ 1,5	0,24 ÷ 0,48	0,6 ÷ 1,2	0,4 ÷ 0,8	1 ÷ 2
3	4,3%	0,6 ÷ 0,9	1,5 ÷ 2,25	0,48 ÷ 0,72	1,2 ÷ 1,8	0,8 ÷ 1,2	2 ÷ 3
Linee ottime							
Linee mediocri							

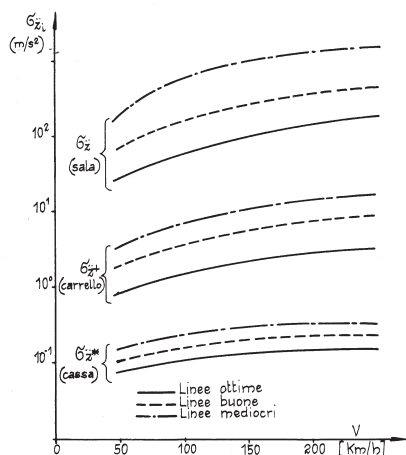


Fig. 5.8 - Influenza del livellamento di binario sui moti verticali

Tenendo presente che i sovraccarichi dinamici sono costituiti dalle forze d'inerzia, l'esame dei dati in tabella rivela che le deviazioni standard per i dinamici per cassa e carrello sono dell'ordine del 5-12% dei carichi statici e poiché i valori massimi sono

dell'ordine del triplo delle deviazioni standard, se ne deduce che sono piuttosto modesti; ben maggiori sono gli sforzi dinamici sulle sale e quindi sugli elementi calettati sugli assili (boccole, dischi freno, ponti) sui quali, come già si è visto, si fa sentire notevolmente la rigidità meccanica del binario, tanto che essi mediamente raddoppiano se essa passa da 5 a 15.10⁶ Kg/m: in modo diverso, lo stesso confronto è presentato sulla tabella II.

Infine per via della distribuzione gaussiana delle risposte in condizioni di funzionamento lineare si ottiene la distribuzione probabilistica delle accelerazioni ($z = \lambda \cdot \delta_z$ in m/s²) in cassa, riportate nella tabella III.

6. Altre applicazioni dei metodi statistici

I metodi statistici si prestano bene anche in altri campi della dinamica; tre applicazioni sono descritte nel presente paragrafo.

6.1. Indice di marcia Wz (Wertungszahl)

Il metodo fu introdotto dal dr. SPERLING negli anni '40, per consentire una valutazione delle prestazioni tanto dal punto di vista della qualità di marcia che da quello del confort, cioè dell'effetto delle vibrazioni meccaniche sui viaggiatori.

È noto che le equazioni che sono alla base dell'indice Wz erano originariamente scritte nel modo seguente

$$W_z = 0,896 \sqrt{\frac{10}{f} \frac{a^3}{f}} \quad \text{per la qualità di marcia} \quad (6.1.1)$$

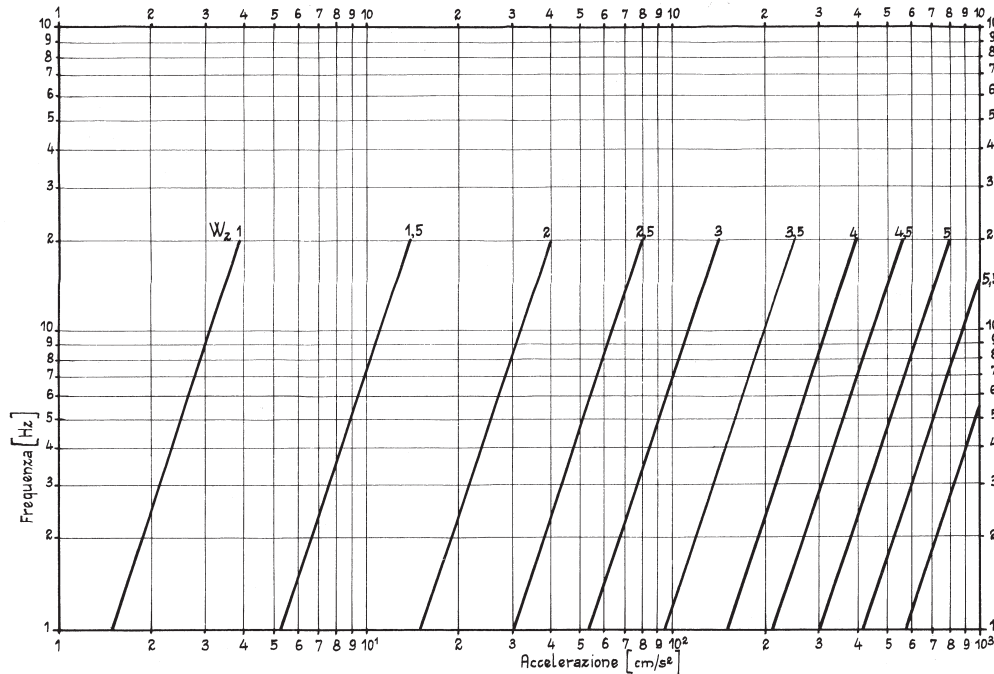


Fig. 6.1.1 - Relazioni fra accelerazioni, frequenza e indice Wz

$$W_z = 0,896 \sqrt{\frac{10}{f}} \frac{a^3}{f} \cdot F(f) \text{ per il confort dei passeggeri} \quad (6.1.2)$$

in cui f è la frequenza d'oscillazione in Hz

a è l'ampiezza dell'accelerazione in cm/s^2

$F(f)$ è un fattore di ponderazione, funzione della frequenza e diverso per le vibrazioni verticali ed orizzontali.

Gli indici possono assumere valori da 1 a 5 nel primo caso (qualità di marcia) e da 1 a 4 nel secondo (confort passeggeri) essendo le prestazioni tanto migliori quanto minore è il valore dell'indice.

Nella fig. 6.1.1 sono riportati i diagrammi di W_z in funzione della frequenza e dell'accelerazione; nella fig. 6.1.2 sono riportati i diagrammi relativi ai fattori di ponderazione.

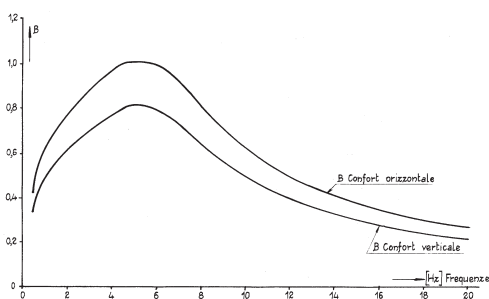


Fig. 6.1.2 - Fattori di ponderazione per W_z (orizzontali e verticali)

Poiché le vibrazioni di un veicolo sono variabili in frequenza ed ampiezza, l'espressione generale usata per la valutazione era la seguente

$$W_{\text{per}} = \sqrt{10} \sqrt{u_{11} W_{Z11}^{10} + u_{12} W_{Z12}^{10} + \dots + u_{21} W_{Z21}^{10} + u_{22} W_{Z22}^{10}} \quad (6.1.3)$$

i fattori u_{ij} danno il rapporto del numero di oscillazioni con grandezza ij rispetto al numero totale di oscillazioni; ne segue che la valutazione manuale di una registrazione risulta molto laboriosa per cui con lo sviluppo degli elaboratori elettronici fu realizzato negli anni '60 un dispositivo analogico per il calcolo dei W_z . La comparsa di analizzatori digitali ha consentito un'ulteriore realizzazione (intorno al 1975) più rapida e precisa, per la quale le equazioni, senza modificarne il contenuto, assumono la seguente forma

$$W_z = \sqrt{10} \sqrt{\frac{3}{a} \cdot B_i^3} \quad (6.1.4)$$

in cui a è ancora l'ampiezza dell'accelerazione e B_i è il fattore di ponderazione in funzione della frequenza, definitivo per la qualità di marcia (B), per il confort orizzontale (B_w) e verticale (B_s): tra questi ultimi si ha la relazione: $B_w = 1,25 B_s$.

Le accelerazioni misurate in cassa sono costituite da tutto uno spettro in cui in particolare compaiono le frequenze dei modi propri di vibrare del sistema veicolo-binario.

L'elaborazione del segnale comporta quindi un'analisi spettrale delle accelerazioni misurate: lo spettro in generale non è una funzione discreta ma continua, e tale sarà anche l'indice W_z : l'indice totale si ottiene quindi per integrazione nell'intervallo di frequenze $0,5 \div 30$ Hz.

In generale

$$W_z = \sqrt{10} \sqrt{\int_{0,5}^{30} \frac{a^3}{f} \cdot B_{wi}^3 \cdot df} \quad (6.1.5)$$

Il metodo descritto è usato per la valutazione dell'indice W_z da registrazioni di accelerazioni in linea sui veicoli in esame: ma come si è visto in precedenza è possibile col calcolo ottenere la risposta spettrale in accelerazione, note la risposta in frequenza del veicolo e l'eccitazione spettrale del binario.

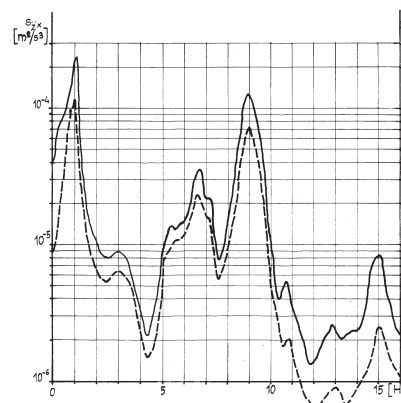


Fig. 6.1.3 - Risposta spettrale calcolata e corretta con il fattore di ponderazione

Quindi anche in sede di calcolo sarà possibile ottenere l'indice W_z applicando alla risposta spettrale la ponderazione in frequenza secondo le curve di fig. 6.1.2: l'integrazione della risposta corretta conduce infine all'indice W_z .

Risulta così disponibile un ulteriore criterio di giudizio e di confronto fra diverse soluzioni per le ottimizzazioni dei parametri costruttivi, ed in particolare delle sospensioni.

6.2. Valutazione delle forze di guida Y nella marcia in curva

È nota l'importanza sempre maggiore acquistata dai rilievi delle forze di interazione ruota-rotaia nel piano orizzontale e verticale.

Si tratta delle forze Q verticali ed Y forze orizzontali che si distinguono in forze direttrici (Y_p) di guida (Y_{ie}) e di ripage (Y_i): le prime sono importanti in curva perché sono un indice dell'usura dei bordini delle ruote a contatto con la rotaia, le seconde perché insieme con Q_i formano il rapporto di svio Y_i/Q_i fondamentale per valutare la sicurezza allo svio; le ultime perché il loro valore costituisce il criterio di giudizio circa l'aggressività di un veicolo nei riguardi del binario poiché se supera il valore limite di PRUD'HOMME

$$Y_{\text{Lim}} = 0,85 \left(10 + \frac{2Q}{3} \right) \quad (6.2.1)$$

può determinare una deformazione permanente.

Orbene nelle registrazioni di forze Y , Q una stima a vista non risulta oggettiva; l'analisi della distribuzione di tali forze secondo diversi livelli costituiscono un ottimo criterio oggettivo per giudicare non solo il valore medio (per es. in curva) ma anche per

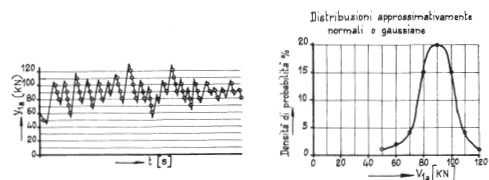


Fig. 6.2.1 - Distribuzione forze di guida in curva

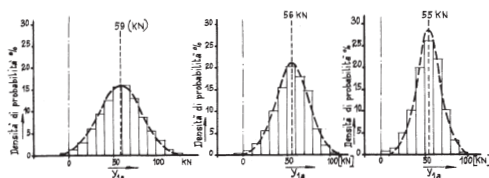


Fig. 6.2.2 - Istogramma e curve di densità di probabilità

velocità in rettilineo) sono tanto più alti quanto meno è regolare il binario dal punto di vista geometrico: questo a parità di veicolo come risulta dalle curve riportate in fig. 6.2; naturalmente a parità di binario in curva i sovraccarichi dinamici dipendono dai dati costruttivi del veicolo, come masse, rigidità, ecc. Nelle tre curve si vede chiaramente che nella prima il binario è in condizioni meno buone e che nella terza è in ottime condizioni.

6.3. Linearizzazione statistica

Fra i parametri principali che influenzano la dinamica laterale dei veicoli ci sono i profili dei cerchioni e delle rotaie che accoppiati insieme determinano conicità e richiamo gravitazionale.

Siccome i profili conici pur fornendo le migliori prestazioni, non si mantengono tali che per poche migliaia di chilometri, e per evitare la costosa operazione di frequenti riprofilature, si tende ormai verso l'adozione dei cosiddetti profili adattati all'usura, del tipo S 1002, per i quali conicità e richiamo sono funzioni dello spostamento laterale della sala rispetto al binario, a parità di profilo di rotaia e del suo angolo di posa: per es. per le variazioni dei raggi di rotolamento si veda il diagramma di fig. 6.3.

Si pone quindi il problema relativo al valore di conicità da introdurre nei calcoli di dinamica laterale: trattandosi di relazione

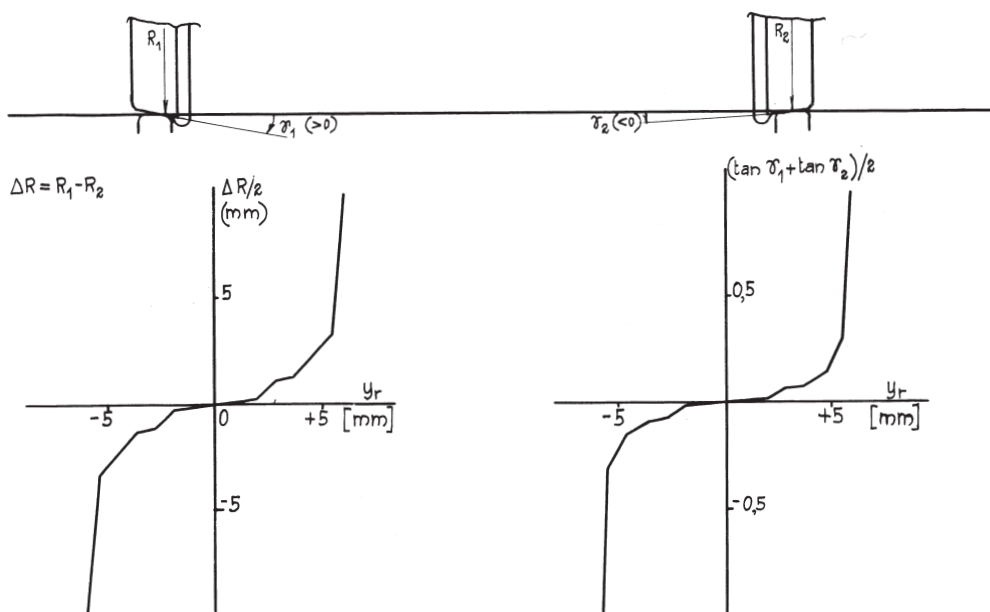


Fig. 6.3 - Diagrammi per calcolo conicità e richiamo gravitazionale

conoscere la dispersione: infatti anche per tali grandezze è risultato sperimentale che la densità di probabilità dei valori delle forze è di tipo gaussiano per cui effettuata l'analisi di livello è possibile individuare valore medio e deviazione standard (questo sia in rettilineo che in curva): quest'ultima dà anche idea del valore massimo ($\sim 3 \cdot \sigma$) dei sovraccarichi dinamici, ed il suo valore assoluto è anche un indice delle condizioni di manutenzione più o meno buone perché i sovraccarichi (a pari a_{nc} in curva o a pari

non-lineare si impone una linearizzazione che fornirà valori diversi a seconda dell'ampiezza degli spostamenti: anche in questo caso la statistica offre possibilità di applicazioni come dalla linearizzazione di Booton, descritta nel seguito (3).

In generale si abbia un elemento a caratteristica non-lineare espressa dalla relazione

$$v(t) = N[u(t)] \quad (6.3.1)$$

in cui $v(t)$ e $u(t)$ sono i segnali di ingresso ed uscita.

Sostituendo l'elemento non-lineare con un equivalente fattore di guadagno K e con una sorgente di disturbo $\eta(t)$ si ottiene

$$v(t) = K \cdot u(t) + \eta(t) \quad \text{da cui: } \eta(t) = v(t) - K \cdot u(t) \quad (6.3.2)$$

La correlazione incrociata tra il disturbo $\eta(t)$ e l'ingresso per $\tau = 0$, (cioè per sfasamento nullo tra i due segnali) è

$$R_{\eta\eta}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) \cdot \eta(t) \cdot dt \quad (6.3.3a)$$

e cioè

$$R_{\eta\eta}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} N u(t) \cdot u(t) - K \int_{-T}^{+T} u(t)^2 \cdot dt; \quad (6.3.3b)$$

in altro modo, usando le funzioni probabilistiche

$$R_{\eta\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} N(U) \cdot U \cdot f(U) \cdot dU - K \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 \cdot f(U) \cdot dU \quad (6.3.4)$$

in cui $f(U)$ è la funzione densità di probabilità per il processo aleatorio U .

Il valore ottimo di K sarà quello che rende nulla la correlazione incrociata: $R_{\eta\eta}(0) = 0$; inoltre il secondo termine nel secondo membro dell'ultima relazione è la varianza del segnale di ingresso.

Ne risulta per K la seguente espressione

$$K = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} N(U) \cdot U \cdot f(U) \cdot dU \quad (6.3.5)$$

Se la densità di probabilità è di tipo gaussiano, il guadagno K può essere facilmente calcolato.

7. Conclusioni

Le possibilità di applicazione dei metodi statistici nella dinamica ferroviaria si estendono dall'analisi di risultati sperimentali a calcoli relativi alla valutazione sia di parametri fondamentali, come la conicità effettiva, sia di indici di qualità di marcia e di confort passeggeri, a condizione di conoscere gli spettri di eccitazione dei moti parassiti.

Anche se in questo campo i dati disponibili non sono molti e se ulteriori perfezionamenti nella loro elaborazione dovranno ancora essere compiuti, è certo che è senz'altro possibile effettuare se non altro calcoli di confronto allo scopo di ottimizzare la costruzione: in tal modo, anche se il giudizio definitivo sarà sempre quello delle prove in linea si potranno ottimizzare soluzioni già in sede di progetto: è auspicabile che anche in Italia vengano messi a disposizione dati di tipo SPD per tratte tipiche in modo che siano più certi i fondamenti su cui si basa il calcolo dinamico dei veicoli.

SIMBOLOGIA

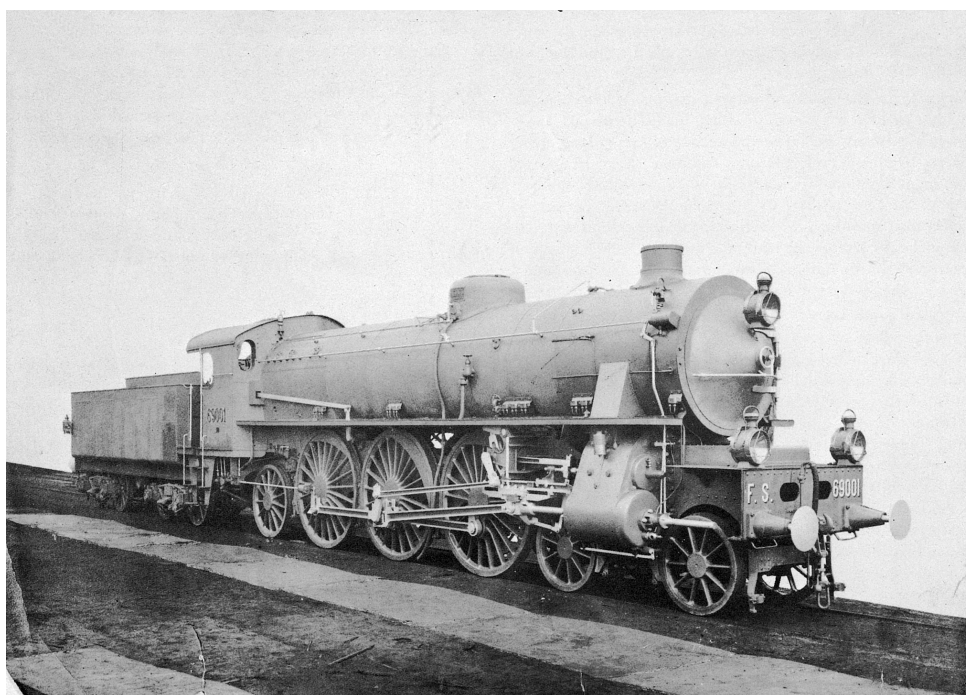
W	Variabilità aleatoria
μ_w	Valore medio
R_w	Funzione di autocorrelazione
p	Densità di probabilità
P	Probabilità cumulativa
ψ^2	Valore quadratico medio
G,S	Densità spettrali di potenza
σ^2	Varianza

σ	Deviazione standard
R_{xy}	Funzione di correlazione incrociata
G_{xy}	Densità spettrale di potenza incrociata
γ_{xy}^2	Funzione di coerenza
F	Forza impulsiva
h(t)	Risposta impulsiva unitaria
H(p)	Funzione di trasferimento
$f_i(t)$	Funzione generica aleatoria
H(f)	Funzione di risposta in frequenza
H(f)	Fattore di guadagno o di amplificazione
$\Phi(f)$	Fattore di fase
λ	Lunghezza d'onda
F	Frequenza spaziale
Ω	Pulsazione spaziale
T	Energia cinetica
U	Energia potenziale
φ	Funzione dissipativa
M	Masse
K	Coefficienti di smorzamento
C	Rigidzze
2 a ⁺	Passo del carrello
2 a [*]	Interperno di veicolo a due carrelli
F	Trasformata di Fourier
X	Coefficiente di modulazione di H ²
s _w ['] (Ω)	Densità spettrale spaziale
s _w ['] (ω)	Densità spettrale temporale
W ₂	Indice di marcia
Y _{lim}	Valore limite delle forze di ripage
u(t)	Segnale di ingresso
v(t)	Segnale di uscita
N[u(t)]	Funzione non-lineare
K	Guadagno linearizzato statisticamente

BIBLIOGRAFIA

- [1] Mitteilung aus Bundesbahn-Versuchsam für Wagen, Minden: *Automatische Auswertungsmethode zur Bestimmung der Wagenlaufgüte* - Glaser's Annalen XII-1961
- [2] STASSEN-BOMMEL - *Caractéristiques stochastiques des déviations des files de rail en vue de l'étude du lacet* - ORE DT V/1966
- [3] STASSEN - *Random lateral motions of railway vehicles* - Doctor Thesis - Delft University 1967
- [4] GILCHRIST - *An analytical solution to a simple problem in the random vertical response of railway vehicles* - B.R.R.D. Rp DYN/54
- [5] GENT - JANIN - *La qualité de la voie ferrée* - Revue Générale des Chemins de Fer X - 1969
- [6] PRUD'HOMME - *La voie* - Revue Générale des Chemins de Fer I/1970
- [7] WEBER - *Schnelleres Befahren von engen Gleissbogen* - Glaser's Annalen 2/3-1970
- [8] MORON - *Principes fondamentaux dans la conception des bogies* - Revue Générale des Chemins de Fer X-1970
- [9] BENDAT - PIERSON - *Random Data: Analysis and Measurement Procedures* - Wiley-Interscience - 1971
- [10] THOMSON - *Vibrazioni Meccaniche. Teoria ed applicazioni* - Tamburini Ed. - 1974
- [11] DAFFOS - *Le bogie Y 32. Etudes de base et essais* - Revue Générale des Chemins de Fer IX-1974
- [12] KRETTEK - *Ein berechnungsverfahren des Schwingungsverhaltens von Schienenfahrzeugen bei regelloser Erregung* - Glaser's Annalen I/1975
- [13] KRETTEK - *Die Registrierung und Analyse von Gleisunregelmäßigkeiten* - Glaser's Annalen 11/1975

- [14] KEIZER – *Recent calculation on the hunting motions of railway vehicles running on 4-Wheeled bogies* – Paceika: Symp. on "Dynamics of vehicles on roads and on railway track" – SWET and ZEITLINGER B.V. Amsterdam/1976
- [15] GILCHRIST – WICKENS – *Vehicle Dynamics: a practical theory* – Inst. Mechan. Engin. E VII-VIII/1977
- [16] SIÖSTEDT – *Recherches effectuées en Suède sur le comportement dynamique des véhicules sur rails* – Rail International X/1977
- [17] MITSCHKE – *Rechnungen und Versuche an einen zweiachsigen Schienenfahrzeug* – Glaser's Annales 2/3/1979
- [18] GARG – *Modèles de calcul du comportement des véhicules ferroviaires en circulation* – Rail International VI/79
- [19] HELMS-IMME – *Querdynamik zweiachsiger Schienenfahrzeuge* – ETR 7-8/1979
- [20] PAPOULIS – *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* – McGraw-Hill Kogakusha 1965



Vecchie glorie.