

## SCIENZA E TECNICA

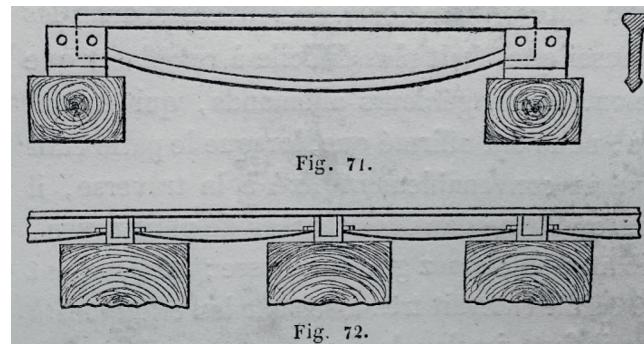


## Il calcolo del binario

*Calculation of the track*

(https://www.medra.org/servlet/view?lang=it&amp;doi=10.57597/IF.03.2024.ART.1)

Francesco NATONI



(Fonte – Source: [1])

Rotaie a ugual resistenza ed ondulate. All'epoca la resistenza era considerata la tensione.

*Curved rails with equal strength. At the time, resistance was considered tension.*

**Sommario** - La sostanziale equivalenza dei metodi di calcolo del binario secondo i due filoni consolidatisi nel tempo di WINKLER – ZIMMERMANN (trave continua su suolo elastico) e di ENGHESER (trave su appoggi elastici discontinui), consente di adottare l'uno o l'altro metodo fermo restando le relative limitazioni di applicabilità. Si esaminano situazioni particolari (variazione brusca di rigidità del supporto, assenza di portanza delle traverse, ecc.) con valutazione degli effetti indotti in termini di sollecitazioni in rotaia e di accelerazioni verticali applicate alle ruote.

## 1. Introduzione

L'esigenza di conoscere le tensioni in rotaia al transito dei carichi dei rotabili nasce insieme all'esercizio ferroviario (metà 1800).

Il frequente ripetersi delle rotture delle barre, e relative nefaste conseguenze, che ebbero a verificarsi non appena il peso e la velocità delle locomotive aumentava, sollecitavano, per il dimensionamento della rotaia, l'adozione di criteri adeguati, cioè appoggiati alla teoria dell'equilibrio dei corpi elasticci: tale teoria aveva trovato un sorprendente sviluppo quando nel 1826 comparve in Francia l'opera basilare del NAVIER professore alla Scuola di Ponti e Strade di Parigi.

Ne derivò, l'ovvia conseguenza di applicare al calcolo del binario i metodi della "Scienza delle Costruzioni" che via via si andavano affinando.

In effetti, la maggioranza dei guasti interessava le giunzioni non appoggiate dove, mancando la continuità della trave e, per le modeste prestazioni delle ganasce inchiavardate, le sollecitazioni in rotaia erano maggiori. Infatti, il CANTALUPI

**Summary** - The substantial equivalence of the calculation methods of the track according to Winkler and Zimmermann's currents consolidated over time (continuous beam on elastic soil) and that of Enghesser (beam on discontinuous elastic supports), allows adopting one or the other method without prejudice to the relative limitations of applicability. Particular situations are analysed (abrupt change in rigidity of the support, absence of lift of the sleepers, etc.) with evaluation of the effects induced in terms of stresses on the rail and vertical accelerations applied to the wheels.

## 1. Introduction

The need to know the rail tensions at the transit of rolling stock loads arises together with the railway operation (mid-1800).

The frequent repetition of bar breakages, and their ill-fated consequences, which occurred as soon as the weight and speed of the locomotives increased, prompted the adoption of adequate criteria for the sizing of the rail, that is, supported by the theory of the equilibrium of elastic bodies: this theory had found a surprising development when in 1826 the basic work of NAVIER, professor at the School of Bridges and Streets of Paris appeared in France.

As a result, the obvious consequence of applying the "Construction Science" methods that were gradually being refined to the calculation of the track.

Indeed, the majority of failures affected the unsupported joints where the stresses on the rail were greater, due to the lack of continuity of the beam and to the modest performance of the fishplate. In fact, for the calculation of rail ten-

## SCIENZA E TECNICA

(1872) [2] proponeva, per il calcolo delle tensioni in rotaia, di considerarla come una mensola incastrata, di lunghezza pari al semispartito delle traverse, caricata in punta.

La proposta, in sé ragionevole, sovrastima il momento flettente e motiva l'adozione, per tutta la barra, di una sezione sovrabbondante: si qualifica, pertanto, economicamente discutibile. Le problematiche tipiche delle giunzioni furono affrontate [6] sviluppando – non sempre con successo- gli organi di giunzione, almeno fino alla loro definitiva eliminazione con la costituzione del binario continuo di estensione illimitata (la cosiddetta Lunga Rotaia Saldata passante).

### 2. Il calcolo del binario

Come “Calcolo del binario” qui s'intende- convenzionalmente- la ricerca delle deformazioni della rotaia, delle tensioni flessionali in questa e altre grandezze connesse, alla presenza di carichi verticali in condizioni quasi- statiche. Si escludono, pertanto, quanto connesso ai complicati fenomeni d'interazione ruota-rotaia [13][17] e agli aspetti vibrazionali del binario medesimo [18].

Numerosi furono i contributi: dal WINKLER (1865) “Vortrage über Eisenbahnbau”, allo ZIMMERMANN (1888) “Die Berechnung des Eisenbahn.Oberbaues” allo ENGESSER (1888) “Zur Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues”, al Talbot (1919) “Stresses in Railroad Track” per citare i principali [19].

Per un elenco più completo dei “precursori” vedasi [3].

Altre informazioni circa i criteri di calcolo impiegabili si ricavano in MARONGIU (2022) [4].

Lo sviluppo storico [15][16] delle caratteristiche dell'armamento (profilo della rotaia, dimensioni della traversa, attacchi) fino all'adozione della traversa in c.a.p. è improntato su un costante irrobustimento delle porzioni metalliche dell'armamento medesimo per tener seguito all'incremento dei pesi e delle velocità dei treni.

Se all'inizio dell'esercizio di stato delle Ferrovie Italiane le circolazioni “top” marciavano a 80 km/h con pesi<sup>1</sup> assiali delle locomotive di 16 t. su rotaie del peso di 36 kg/m e traverse in legno da m. 2,60, già negli anni 1960 (adozione della rotaia del peso di 60 kg/m) si circolava a 120 km/h con pesi assiali di 18 t. Il rapporto tra i due prodotti V P è di 1,7 km·kg/h; il rapporto tra il peso dei due tipi rotaia è di 1,7. Il risultato non deve sorprendere perché la correlazione dei due fattori è, pressoché, lineare nel tempo.

L'analogo prodotto per le locomotive dell'Alta Velocità (300 km/h x 17 t = 5100 km·kg/h) più che doppio di quel 120 x 18 = 2160 km·kg/h, non sembrerebbe congruo (poiché le rotaie dell'AV sono ancora quelle da 60 kg/m, sebbene i processi metallurgici per l'affinamento dell'acciaio siano stati migliorati, la tecnica della colata continua dei

sions, CANTALUPI (1872) [2] proposed considering it as a cantilever beam, equal in length to the half distance of the sleepers, loaded at the tip.

The proposal, which was in itself reasonable, overestimates the bending moment and motivates the adoption of an overabundant section throughout the bar: it therefore qualifies as economically questionable. The typical problems of junctions were addressed by [6] developing the junction parts – not always successfully -, at least until their definitive elimination with the setting-up of the continuous track with unlimited extension (the so-called Long Welded through Rail).

### 2. Calculation of the track

The meaning of “Calculation of the track” here - conventionally - is the search for rail deformations, flexural stresses in it and other related characteristics, the presence of vertical loads in quasi-static conditions. Therefore, what is connected to the complicated phenomena of wheel-rail [13][17] interaction and the vibrational aspects [18] of the track itself is excluded.

There were numerous contributions: from WINKLER (1865) “Vortrage über Eisenbahnbau”, to ZIMMERMANN (1888) “Die Berechnung des Eisenbahn.Oberbaues” to ENGESSER (1888) “Zur Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues”, to TALBOT (1919) “Stresses in Railroad Track” just to mention the main ones [19].

For a more complete list of “precursors” see [3].

Further information on the calculation criteria can be found in MARONGIU (2022) [4].

The historical development [15][16] of the characteristics of the permanent way (profile of the rail, dimensions of the sleeper, fastenings) until the adoption of the reinforced concrete sleeper is based on constant strengthening of the metal portions of the permanent way itself to keep up with the increase in the weights and the train speeds.

If at the beginning of the state operation of the Italian Railways the “top” circulations were running at 80 km/h with axial weights<sup>1</sup> of the locomotives of 16 t.<sup>1</sup> on rails weighing 36 kg/m and wooden sleepers of 2.60 m, already in the 1960s (adoption of the rail weighing 60 kg/m) circulation was at 120 km/h with axial weights of 18 t. The ratio between the two V P products is 1.7 km·kg/h; the ratio between the weight of the two rail types is 1.7. The result should not be surprising because the correlation of the two factors is almost linear over time.

The same produced for the High Speed locomotives (300 km/h x 17 t = 5100 km·kg/h) more than double than that 120 x 18 = 2160 km·kg/h, would not seem appropriate (since the HS rails are still the 60 kg/m ones, although the metallurgical processes for the refinement of steel have been

<sup>1</sup> Sia consentito, almeno nel richiamo storico, di usare le unità di misura, tuttavia, più consuete per il periodo.

<sup>1</sup> At least in the historical reference, let us use the most usual units of measurement, however for that time.

## SCIENZA E TECNICA

blumi sia diventata la pratica standard, i controlli non distruttivi e le tecniche di diagnostica automatica all'atto della fabbricazione siano molto più precisi): peraltro, la configurazione dei binari AV è inconfondibile con quella dei binari del 1960 (traverse in c.a.p. da m. 2,60 vs. traverse in legno, piano di piattaforma in subballast vs. strato di terra, regimi di diagnostica della difettosità e di manutenzione informatizzati e meccanizzati vs. controlli e lavorazioni ancora sostanzialmente impostate sulla manualità).

Inoltre, la qualità dei rotabili è incomparabile: si consideri, ad esempio l'aggressività di un treno ETR 1000 con quella di una locomotiva E 428<sup>2</sup>!

Le modellazioni che nel tempo si sono affinate [10][11][12] seguono due filoni:

- quello di WINKLER – ZIMMERMANN<sup>3</sup> che considera la rotaia su appoggio diffuso ed impiega la "Teoria della trave continua su suolo elastico alla Winkler", in breve trave elastica – t.e.;
- quello alla Enghesser che considera la trave su appoggi elastici discontinui (le traverse) che adotta p. es. l'Equazioni dei 4 Momenti (o analoghi metodi a soluzioni di sistemi di equazioni), le cui filiazioni possono essere considerati i Modelli ad Elementi Finiti.

Dalla letteratura tecnica (testi, ad esempio [1][3][4], articoli su riviste specializzate e siti web) sembrerebbe maggiormente illustrato il metodo della trave elastica, essendo invece, d'interesse – per applicazioni particolari (quelle dinamiche) l'impiego di modelli numerici.

A fronte di una tale quantità di riferimenti, non apparirebbero necessari altri contributi potendosi agevolmente operare consultando la letteratura.

Inoltre, essendosi consolidati il profilo della rotaia e le sue caratteristiche metallurgiche (sostanzialmente le specifiche della rotaia 60E1 non differiscono da quella 60 U salvo come detto gli aggiornamenti produttivi, normata nel 1962) il calcolo del binario "quasi-statico" non sarebbe funzionale ad ulteriori sviluppi tecnologici della rotaia ma resta di assoluto interesse per il calcolo della traversa (componente ancora in evoluzione) e fondamento conoscitivo di base per le elaborazioni dinamiche-vibrazionali, essenziali nelle valutazioni di impatto ambientale cui le scelte tipologiche dell'armamento devono (nelle opportune circostanze) doverosamente tenere conto.

Si ritiene, pertanto, dare seguito:

- analizzando i vantaggi ed i limiti (se esistono) dei due filoni di calcolo;

<sup>2</sup> Locomotiva elettrica delle FS costruita nel 1934-1943, 4 assi portanti da 14,25 t e 4 assi motore da 19,5 t. Vmax 130 km/h poi ridotta a 100.

<sup>3</sup> A rigore lo ZIMMERMANN aveva applicato la teoria della trave elastica alla traversa per trovarne la sua inflessione sotto rotaia per addivenire al cedimento complessivo dell'appoggio. In letteratura, però, [3] il metodo su appoggio continuo viene attribuito allo ZIMMERMANN medesimo.

*improved, the technique of continuous casting of blooms has become standard practice, non-destructive checks and automatic diagnostic techniques at the time of manufacture are much more accurate): moreover, the configuration of the HS rails is incomparable with that of the 1960 rails (reinforced concrete 2.60 m sleepers vs. wooden sleepers, sub-ballast track bed vs earth layer, computerised and mechanised defect diagnosis and maintenance regimes vs controls and machining still substantially set on dexterity).*

*In addition, the quality of the rolling stock is incomparable: consider, for example, the aggressiveness of an ETR 1000 train with that of an E 428 locomotive<sup>2</sup>!*

*The models that have been refined [10][11][12] over time follow two currents:*

- *that of WINKLER – ZIMMERMANN<sup>3</sup> which considers the rail on widespread support and employs the "WINKLER's theory of the continuous beam on elastic soil", in short elastic beam – e.b.;*
- *that of ENGHESER that considers the beam on discontinuous elastic supports (the sleepers) which adopts, for example, the Equations of 4 Moments (or similar methods to solutions of equation systems), whose filiations can be considered Finite Element Models.*

*From technical literature (texts, for example [1][3][4], articles in specialised magazines and websites) the elastic beam method seems to be more illustrated, while the use of numerical models is of interest – for particular applications (dynamic ones).*

*Against such a large number of references, no other contributions would appear necessary, since it would be easy to operate by consulting the literature.*

*In addition, having consolidated the profile of the rail and its metallurgical characteristics (basically the specifications of the 60E1 rail do not differ from the 60 U one - except as said the production updates -, regulated in 1962) the calculation of the "quasi-static" track would not be functional to further technological developments of the rail but remains of absolute interest for the calculation of the sleeper (component still evolving) and basic cognitive foundation for dynamic-vibrational elaborations, essential in environmental impact assessments that the typical choices of the permanent way must duly take into account (in appropriate circumstances).*

*It is considered, therefore, to follow up:*

- *analysing the advantages and limits (if any) of the two calculation currents;*
- *exposing some particular cases, through specific applications.*

<sup>2</sup> FS electric locomotive built in 1934-1943, 4 load-bearing axles of 14.25 t and 4 motor axles of 19.5 t. Vmax 130 km/h then reduced to 100.

<sup>3</sup> Strictly speaking, ZIMMERMANN had applied the theory of the elastic beam to the sleeper to find its inflection under the rail to reach the overall subsidence of the support. In literature, however, [3] the method on continuous support is attributed to ZIMMERMANN himself.

## SCIENZA E TECNICA

- esponendo, mediante specifiche applicazioni, alcuni casi particolari.

### 3. Trave continua su suolo elastico alla Winkler

Quando si usi l'uno o l'altro criterio, una prima difficoltà da superare è la determinazione dei dati di base sui quali impostare il calcolo.

Ora, il binario, nella sua configurazione corrente, cioè quella costituita da un telaio piano (i cui correnti sono le rotaie) collegate da trasversi (le traverse), il tutto appoggiato su un letto di pietrisco (a sua volta sostenuto dal corpo stradale) è complicato dal punto di vista strutturale e sconta notevoli incertezze circa la reologia del supporto (la fondazione).

Mentre per le rotaie, le traverse e connessi organi di attacco, le caratteristiche geometriche e meccaniche sono, praticamente, certe, altrettanto non si può sostenere per quanto riguarda l'appoggio.

Le innumerevoli ricerche (teoriche e sperimentali) fatte, prevalentemente, nella disciplina geotecnica per assegnare le caratteristiche reologiche alla fondazione tendono ad una definizione abbastanza precisa delle stesse [14]. Purtroppo, la variabilità dei componenti (pietrisco, terra) sia nello spazio (cioè lungo l'estesa del binario) sia nel tempo (per le influenze stagionali, di consolidamento, ecc.) non consentono un'affidabilità dei risultati certa.

Si deve, cioè, scontare un certo grado di approssimazione di fatto accettabile. Un po' diverso il caso quando il binario sia appoggiato su impalcati o sia in galleria dove il piano di piattaforma può essere considerato praticamente rigido: i margini di aleatorietà, infatti, si riducono.

Altrettante incertezze pregiudicano l'esatta valutazione dei carichi non appena si abbandoni il calcolo statico.

L'applicazione dei coefficienti di incremento dinamico richiede l'applicazione della statistica: ne deriva che i risultati conseguono dalla affidabilità e precisione che si vuole ottenere.

Ciò, però, non stupisce più di tanto giacché le valutazioni ingegneristiche sono sempre connotate dall'essere "sufficientemente" "esatte".

Il criterio, caratterizzato da uno schema di calcolo concettualmente semplice (trave flessibile su fondazione elastica continua), richiede la soluzione- onerosa ma non difficile - della equazione di equilibrio della struttura (equazione differenziale di quarto grado a coefficienti costanti,) che, per l'appunto, ripostula la costanza dei parametri (modulo di inerzia e modulo di Young della trave e rigidezza dell'appoggio).

In base alle considerazioni fatte dal WINKLER si stima che un prisma (perfettamente elastico e di superficie ed altezza unitarie), appoggiato su un piano perfettamente rigido, sia soggetto, sulla sua faccia piana, ad una pressione verticale  $v$ ; le facce laterali sono libere di deformarsi.

### 3. Continuous beam on Winkler-style elastic soil

*When using either criterion, the first difficulty to overcome is the determination of the basic data on which to set the calculation.*

*Now, the track, in its current configuration, that is, that consisting of a flat frame (whose beams are the rails) connected by joists (the sleepers), all resting on a bed of stone (in turn supported by the subgrade) is complicated from the structural point of view and faces considerable uncertainties about the rheology of the support (the foundation).*

*While the geometric and mechanical characteristics of the rails, sleepers and related fastening parts are practically certain, the same cannot be sustained with regard to the support.*

*The innumerable researches carried out (theoretical and experimental), mainly, in the geotechnical discipline to assign the rheological characteristics to the foundation, tend to a fairly precise definition of the same [14]. Unfortunately, the variability of the components (gravel, earth) both in space (i.e. along the length of the track) and in time (due to seasonal influences, consolidation, etc.) do not allow a certain reliability of the results.*

*A certain degree of acceptable approximation in fact must be considered. The case is a little different when the track is resting on decks or in the tunnel where the platform surface can be considered practically rigid: the randomness margins, in fact, are reduced.*

*As many uncertainties affect the exact evaluation of loads as soon as the static calculation is abandoned.*

*The application of the coefficients of dynamic increase requires the application of statistics: it follows that the results derive from the reliability and precision that one wants to obtain.*

*This, however, is not surprising since engineering evaluations are always characterised by being "sufficiently" accurate.*

*The criterion, characterised by a conceptually simple calculation scheme (flexible beam on continuous elastic foundation), requires the burdensome but not difficult solution - of the equilibrium equation of the structure (fourth degree differential equation with constant coefficients,) which, in fact, shows the consistency of the parameters (inertia module and Young's module of the beam and stiffness of the support).*

*Based on the considerations made by WINKLER, it is estimated that a prism (perfectly elastic and of unitary surface and height), resting on a perfectly rigid plane, is subject to a vertical pressure  $v$  on its flat side; the lateral sides are free to deform.*

*Said prism thus loaded drops by an amount  $d$ : the ratio between pressure and deformation ( $v / d = C_w$  [ $N/m^3$ ]) is called the Winkler coefficient (or deformation module) and the support system is called Winkler soil. In fact, the prism is nothing but a spring.*

## SCIENZA E TECNICA

Detto prisma così caricato si abbassa di una quantità  $d$ : il rapporto fra la pressione e la deformazione ( $v / d = C_w [N/m^3]$ ) si chiama coefficiente di Winkler (o modulo di deformazione) ed il sistema di appoggio si chiama suolo alla Winkler. Di fatto, il prisma altro non è che una molla.

Considerando, ora, una trave retta appoggiata su un suolo alla Winkler, avente una base di larghezza  $B [m]$ , per ogni unità di lunghezza della stessa, si ha una reazione allo spostamento pari a  $B C_w = k [N/m^2]$  ossia la rigidezza lineare dell'appoggio.

La trattazione è di evidente derivazione dal calcolo delle fondazioni: qui l'appoggio è il suolo e la formulazione del coefficiente (o modulo) di sottofondo si avvale del metodo di valutazione delle singole caratteristiche geotecniche del multistrato di appoggio. Nel caso del binario, l'assimilazione alla Winkler è alquanto approssimativa, anche se, data la estrema variabilità dei parametri in gioco che condizionano notevolmente i risultati, è considerata accettabile. Di fatto, il coefficiente  $C_w$  (nel seguito chiamato coefficiente di sottofondo) deve tener conto, con studiate formulazioni:

- della cedevolezza della piastra sottorotaia (nota con apprezzabile certezza ma considerata costante al variare del carico);
- della deformabilità della traversa (se in legno, assolutamente trascurabile per traverse in cemento armato precompresso);
- della cedevolezza dello strato di pietrisco (variabile con le caratteristiche del materiale, con il grado di compattazione, ecc.);
- della cedevolezza dell'eventuale tappetino interposto tra traversa e pietrisco oppure tra pietrisco e piattaforma;
- per binario su opere in terra
- della cedevolezza cumulata del multistrato, costituito dalla piattaforma (subballast, supercompattato, ecc.) la cui profondità da esaminare deve essere tale che le pressioni diventino trascurabili<sup>4</sup>;
- per binario su ponte, viadotto o galleria si considera il supporto rigido.

L'indeterminatezza dei dati di base può essere considerata accettabile, perché il calcolo delle sollecitazioni in rotaia (come pure nella traversa) occorre per operare scelte comparative tra diverse soluzioni: se l'incertezza sul parametro è paritetica la sua influenza è irrilevante rispetto al risultato.

I tanti esperimenti in situ e le misure, anche raffinate, confermano che se, per un dato carico (meglio statico che

Considering, now, a straight beam resting on a WINKLER ground, with a base of width  $B [m]$ , for each unit of length thereof, there is a displacement reaction equal to  $B C_w = k [N/m^2]$  that is to say, the linear stiffness of the support.

The discussion is clearly derived from the calculation of the foundations: here the support is the soil and the formulation of the subgrade coefficient (or module) uses the evaluation method of the individual geotechnical characteristics of the supporting multilayer. In the case of the track, the assimilation to Winkler is somewhat approximate, although considered acceptable, given the extreme variability of the parameters in play that greatly affect the results. In fact, the coefficient  $C_w$  (hereinafter called the subgrade coefficient) must consider, with studied formulations:

- the pliability of the base plate (known with appreciable certainty but considered constant as the load varies);
- the deformability of the sleeper (if made of wood, absolutely negligible for prestressed reinforced concrete sleepers);
- the pliability of the stone layer (variable with the characteristics of the material, with the degree of compaction, etc.);
- the pliability of any mat interposed between the sleeper and the gravel or between the gravel and the platform; for track on earthworks
- the cumulative pliability of the multilayer, consisting of the platform (sub-ballast, super compacted, etc.) whose depth to be examined must be such that the pressures become negligible<sup>4</sup>;
- for track on bridge, viaduct or tunnel, the rigid support is considered.

The uncertainty of the basic data can be considered acceptable, because the calculation of the stresses in the rail (as well as in the sleeper) is necessary to make comparative choices between different solutions: if the uncertainty on the parameter is equal, its influence is irrelevant with respect to the result.

The many in situ experiments and measurements, even refined, confirm that if, for a given load (rather static than dynamic due to the obvious lower uncertainty about its magnitude), subsidence (with displacement transducers) or tensions with strain gauges are measured, depending on the method, the results confirm the theory in line with the parameter settings.

Measuring, for example, the subsidence of the free sleeper loaded with a press at the fastening, knowing the load, we can find the subgrade coefficient of the gravel - platform ensemble with sufficient approximation (obviously in the measuring point).

<sup>4</sup> Dalla sperimentazione citata in [9] risulta che "il valore delle sovrappressioni nel corpo del rilevato si riduce rapidamente dopo il primo strato di 50 cm" ed aumenta con il crescere della velocità di transito.

<sup>4</sup> From the experimentation mentioned in [9] it appears that "the value of the overpressures in the body of the embankment decreases rapidly after the first layer of 50 cm" and increases with the increase in the transit speed.

## SCIENZA E TECNICA

dinamico per l'evidente minore incertezza sulla sua entità), si misurano, a seconda del metodo, cedimenti (con trasduttori di spostamento) oppure tensioni con estensimetri i risultati confermano la teoria coerentemente con le impostazioni dei parametri.

Misurando, ad esempio, i cedimenti della traversa libera caricata con una pressa in corrispondenza dell'attacco, noto il carico, si risale con sufficiente approssimazione al coefficiente di sottofondo del pacchetto pietrisco – piattaforma (ovviamente nel punto di misura).

La risposta è, di norma, tutt'altro che lineare (p.es. il pietrisco s'irrigidisce con l'aumento della pressione) ma, per comodità, si linearizza.

Ponendolo in serie con la cedevolezza (anch'essa linearizzata) della piastra in gomma sottorotaia si ha il coefficiente globale da usare nel calcolo.

L'equazione di equilibrio [5] è, dunque,

$$EJ w^{IV} + kw = q$$

Con

$w$  = il cedimento verticale della trave alla ascissa  $x$  [m];

$q$  = il carico uniformemente distribuito lungo la trave, cioè il peso della rotaia, di mezza traversa e, almeno, quota parte del pietrisco [N/m];

$E$  = modulo di elasticità acciaio [N/m<sup>2</sup>];

$J$  = modulo di inerzia della rotaia [m<sup>4</sup>].

La base della trave (che è la rotaia) va calcolata considerando che la rotaia stessa è appoggiata sulle traverse che gravano il pietrisco tramite una superficie, convenzionalmente, data dal doppio dello sbalzo  $S$  [m] (distanza tra l'asse della rotaia e testata della traversa) per la larghezza  $b$  [m] della traversa medesima; queste sono tra loro intervallate di  $i$  [m]: pertanto, la base  $B$  si ottiene da

$$B = \frac{(L_T - S)b}{I}$$

che per una traversa lunga 2,60 m e larga 0,3 m e posta ad interasse 0,6 m dà  $B=0,55$  m.

Poiché la traversa monoblocco è anch'essa una trave deformabile, per l'individuazione corretta dell'ampiezza della base della trave-rotaia, bisognerebbe calcolare la deformazione della traversa che è funzione della rata di carico su essa applicata: quest'ultima si ricava dal calcolo del binario. Ciò porterebbe alla necessità di un calcolo iterativo (oneroso e, nella generalità dei casi, superfluo per quanto detto circa l'incertezza dei valori da assegnare ai parametri). Ne consegue che considerare la traversa perfettamente rigida è usuale.

Considerare attiva la porzione di traversa pari al doppio dello sbalzo è giustificato dal fatto che la parte interna del binario non risulta così compattata come quella sotto la rotaia: infatti le batte rincalzanti operano abbracciate alla rotaia.

The answer is, as a rule, far from linear (e.g. the gravel stiffens with increasing pressure) but, for convenience, it linearises.

Putting it in series with the compliance of the sub-rail rubber plate (which is also linearised), we have the overall coefficient to be used in the calculation.

The equation of equilibrium [5] is, therefore,

$$EJ w^{IV} + kw = q$$

With

$w$  = the vertical subsidence of the beam at the abscissa  $x$  [m];

$q$  = the load evenly distributed along the beam, i.e. the weight of the rail, half a sleeper and, at least, part of the crushed stone [N/m];

$E$  = steel elasticity modulus [N/m<sup>2</sup>];

$J$  = inertia module of the rail [m<sup>4</sup>].

The base of the beam (which is the rail) must be calculated considering that the rail itself is resting on the sleepers that weigh on the ballast through a surface, conventionally, given by the double of the cantilever  $S$  [m] (distance between the axis of the rail and the head of the sleeper) multiplied by the width  $b$  [m] of the sleeper itself; these are spaced apart by  $i$  [m]: therefore, the base  $B$  is obtained from

$$B = \frac{(L_T - S)b}{I}$$

which for a sleeper 2,60 m long and 0,3 m wide and placed at a distance of 0,6 m results in  $B=0,55$  m.

Since the monobloc sleeper is also a deformable beam, for the correct identification of the width of the base of the beam-rail, the deformation of the sleeper should be calculated as a function of the loading rate applied to it: the latter is obtained from the calculation of the track. This would lead to the need for an iterative calculation (onerous and, in most cases, unnecessary for what has been said about the uncertainty of the values to be assigned to the parameters). It follows that considering the sleeper perfectly rigid is common.

Considering as active the portion of the sleeper equal to twice the cantilever is justified by the fact that the inner part of the track is not as compacted as the one under the rail: in fact, the packers operate clasping the rail.

In Fig. 1, taken from [7], the manual packing under the sleeper is clearly highlighted.

Obviously, in the case of dual block sleepers, considering the actual width of the support area is much more realistic.

Therefore, the value of  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$  (hereinafter called "lambda") is determined, i.e. the inverse of the so-called "characteristic length of the beam"<sup>5</sup>. The magnitude  $k = C_w B / i$  is the

<sup>5</sup> It is thus defined because the moment under load of an unlimited elastic beam is equal to that of a beam of length  $L$  simply resting on supports at the ends and loaded in the centre.

## SCIENZA E TECNICA

In Fig. 1, tratta da [7] ben evidenzia-  
tala rincalzatura manuale sotto traversa.

Ovviamente, nel caso di traverse  
biblocco, prendere in considerazione l'  
ampiezza effettiva dell'area di appog-  
gio è decisamente più realistico.

Si determina, dunque, il valore di  
 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$  nel seguito chiamata "lambda")  
ossia l'inverso della cosiddetta "lunghezza  
caratteristica della trave"<sup>5</sup>. La grandeza  $k = C_w B / i$  è la rigidezza lineica del  
supporto data dalla rigidezza dell'appog-  
gio ripartita sull'interasse delle traverse.

Evidentemente per una traversa  
lunga 2,60 m, la rigidezza lineica vale  
 $k = C_w 0,55$  e per una traversa lunga  
2,30 m, la relazione diventa  $k = C_w$   
0,35 con un rapporto tra le due traverse  
del  $0,35/0,55 = 63\%$ . Pertanto a par-  
ità di coefficiente di Winkler un bina-  
rio con traverse m. 2,30 ha una rigi-  
dezza lineica del 63% inferiore. Ne  
consegue una variazione di  $\lambda$  pari a  
 $\sqrt[4]{0,63} = 89\%$ .

Per una rotaia 60E1, traversa m.  
2,60 oppure m. 2,30 in cap ed  $EJ =$   
 $6415500 \text{ N m}^2$  si ha il grafico 1 rappre-  
sentativo di lambda (Fig. 2).

Si nota che  $\lambda$ , crescendo con la ra-  
dice quarta di  $C_w$ , aumenta di 1,78  
volte per un ordine di grandezza di  $C_w$ .

Ricordando  $k = C_w B$ , l'equazione  
di equilibrio diventa

$$w^{IV} + 4 \lambda^4 w = \frac{q}{EJ}$$

Risolvendo la omogenea ed omet-  
tendo i passaggi<sup>6</sup> si ha

$$w = e^{-\lambda x} [c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x] + e^{\lambda x} [c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x]$$

Risolvendo la particolare, si ha la soluzione generale

$$w(x) = e^{\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x) + \frac{q}{k}$$

con le 4 costanti da determinare in rapporto alle con-  
dizioni ai limiti.



Figura 1- Rincalzatura manuale.  
Figure 1- Manual packing.

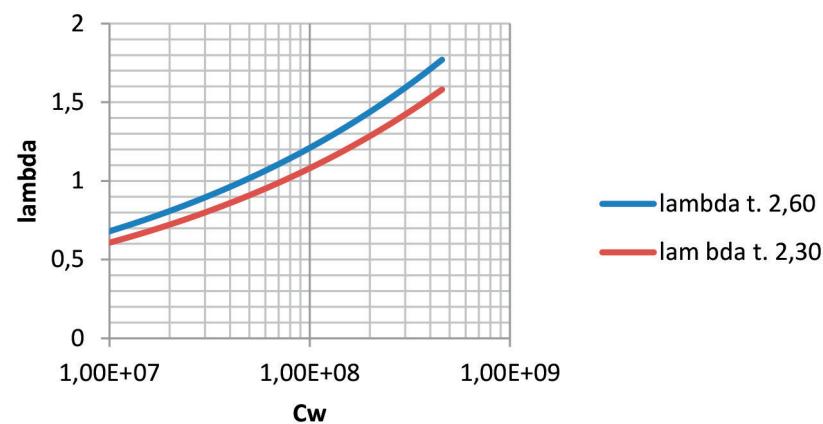


Figura 2-  $\lambda$  in funzione di  $C_w$ .  
Figure 2-  $\lambda$  as a function of  $C_w$ .

linear stiffness of the support given by the stiffness of the sup-  
port distributed over the centre distance of the sleepers.

Evidently for a 2.60 m long sleeper, the linear stiffness is  
 $k = C_w 0.55$  and  $p$ , and for a 2.30 m long sleeper, the relation  
becomes  $k = C_w 0.35$  with a ratio between the two sleepers of  $0.35/0.55 = 63\%$ . Therefore, with the same Winkler coef-  
ficient, a track with 2.30 m sleepers has a 63% lower linear  
stiffness. This results in a variation of  $\lambda$  equal to  
 $\sqrt[4]{0.63} = 89\%$ .

For a 60E1 rail, 2.60 m or 2.30 m precast concrete  
sleeper and  $EJ = 6415500 \text{ N m}^2$  we have graph 1 represen-  
tative of lambda (Fig. 2).

It is observed that  $\lambda$ , increasing with the fourth root of  
 $C_w$ , increases 1.78 times by an order of magnitude of  $C_w$ .

<sup>5</sup> Viene così definita perché il momento sotto carico di una trave elastica illimitata è pari a quello di una trave di lunghezza  $L$  semplicemente appoggiata agli estremi e caricata al centro.

<sup>6</sup> Per lo sviluppo completo della equazione differenziale si  
consulti [8].

## SCIENZA E TECNICA

### 3.1. Trave illimitata ad ambo gli estremi

In tal caso  $C_3 = C_4 = 0$

Pertanto è

$$w(x) = e^{-x\lambda} (C_1 \sin x\lambda + C_2 \cos x\lambda) + q/k \quad (\text{Eq. 1})$$

Quindi, gli sviluppi lungo x del cedimento, della sua derivata prima (l'inflessione), della derivata seconda (la rotazione) e della derivata terza (il taglio) contengono il termine di attenuazione  $e^{-\lambda x}$ .

Ne consegue che oltre l'ascissa  $\underline{x} = (\ln 0,01)/\lambda = 4,606/\lambda$  tutte le grandezze sono lo 1% del valore massimo.

Pertanto, per i due estremi di  $C_w$  considerati in letteratura (2E7 N/m<sup>3</sup> - sottofondo scadente — 2E8 N/m<sup>3</sup> - sottofondo buono)  $0,807 < \lambda < 1,439 \text{ m}^{-1}$  si avrebbe una lunghezza  $6,6 > \underline{x} > 2,5 \text{ m}$ ; la costanza dei parametri deve sussistere per una estesa, rispettivamente, di 5 e 13,2 m a cavallo del punto di applicazione del carico, per non superare un errore dello 1%.

Derivando (Eq. 1) in  $x = 0$  si ha

$$C_1 = -\frac{w(0)''}{2\lambda^2}$$

$$C_2 = \frac{w(0)'''}{2\lambda^3} + \frac{w(0)''}{2\lambda^2}$$

da cui

$$w(0)' = -\frac{w(0)''}{\lambda} - \frac{w(0)'''}{2\lambda^2}$$

$$w(0) = \frac{w(0)''}{2\lambda^2} + \frac{w(0)'''}{2\lambda^3} + q/k$$

Ponendo, con carico  $P(0)$  diretto verso il basso e momento  $M(0)$  che tende le fibre superiori applicati in  $x=0$ , con le convenzioni

$w$  + verso il basso

$w'$  rotazione oraria + se x (assolute) dirette a dx

$w'$  rotazione antioraria + se x (assolute) dirette a sx

$w''$  + se variazione di  $w'$  positiva

$w'''$  + se variazione di  $w''$  positiva

Essendo  $w'' = \frac{M_i}{EJ}$ , essendo  $M_i$  + se tese fibre superiori  
 $w'' = \frac{T}{EJ}$ , es-  
 sendo  $T$  + se

si ottiene la rotazione  $\theta(0) = \frac{M_i(0)}{\lambda EJ} + \frac{T(0)}{2\lambda^2 EJ}$

ed il cedimento

$$w(0) = +\frac{M_i(0)}{2\lambda^2 EJ} + \frac{T(0)}{2\lambda^3 EJ} + q/k$$

Ma essendo  $EJ = \frac{k}{4\lambda^4}$

$$\theta(0) = \frac{4M_i(0)\lambda^3}{k} - \frac{2T(0)\lambda^2}{k}$$

$$w(0) = -\frac{2M_i(0)\lambda^2}{k} + \frac{2T(0)\lambda}{k} + q/k$$

Recalling  $k = C_w B$ , the equilibrium equation becomes

$$w'''' + 4\lambda^4 w = \frac{q}{EJ}$$

Solving the homogeneous and omitting the steps<sup>6</sup> results in

$$w = e^{-\lambda x} [c1 \cos \lambda x + c2 \sin \lambda x]$$

$$+ e^{\lambda x} [c3 \cos \lambda x + c4 \sin \lambda x]$$

Solving the particular, we have the general solution

$$w(x) = e^{-\lambda x} (C3 \cos x\lambda + C4 \sin x\lambda)$$

$$+ e^{-x\lambda} (C_1 \sin x\lambda + C_2 \cos x\lambda) + q/k$$

with the 4 constants to be determined in relation to the conditions at the limits.

### 3.1. Unlimited beam at both ends

In this case  $C_3 = C_4 = 0$

Therefore, it is

$$w(x) = e^{-x\lambda} (C_1 \sin x\lambda + C_2 \cos x\lambda) + q/k \quad (\text{Eq. 1})$$

Hence, the developments along x of the subsidence, of its first derivative (the inflection), of the second derivative (the rotation) and of the third derivative (the shear) contain the mitigation term  $e^{-\lambda x}$ .

It follows that besides the abscissa  $\underline{x} = (\ln 0,01)/\lambda = 4,606/\lambda$  all quantities are 1% of the maximum value.

Therefore, for the two extremes of  $C_w$  considered in literature (2E7 N/m<sup>3</sup> - poor substrate — 2E8 N/m<sup>3</sup> - good substrate)  $0,807 < \lambda < 1,439 \text{ m}^{-1}$  we would have a length of  $6,6 > \underline{x} > 2,5 \text{ m}$ ; the regularity of the parameters must exist for an extension, respectively, of 5 and 13,2 m at the point of application of the load, in order not to exceed an error of 1%.

Deriving (Eq. 1) in  $x = 0$  we have

$$C_1 = -\frac{w(0)''}{2\lambda^2}$$

$$C_2 = \frac{w(0)'''}{2\lambda^3} + \frac{w(0)''}{2\lambda^2}$$

From which

$$w(0)' = -\frac{w(0)''}{\lambda} - \frac{w(0)'''}{2\lambda^2}$$

$$w(0) = \frac{w(0)''}{2\lambda^2} + \frac{w(0)'''}{2\lambda^3} + q/k$$

Placing, with load  $P(0)$  directed downwards and moment  $M(0)$  tending the upper fibres applied at  $x=0$ , with the conventions

$w$  + downwards

$w'$  clockwise rotation + if x (absolute) directed to the right

$w'$  counterclockwise rotation + if x (absolute) directed to the left

<sup>6</sup> For the full development of the differential equation, see [8].

## SCIENZA E TECNICA

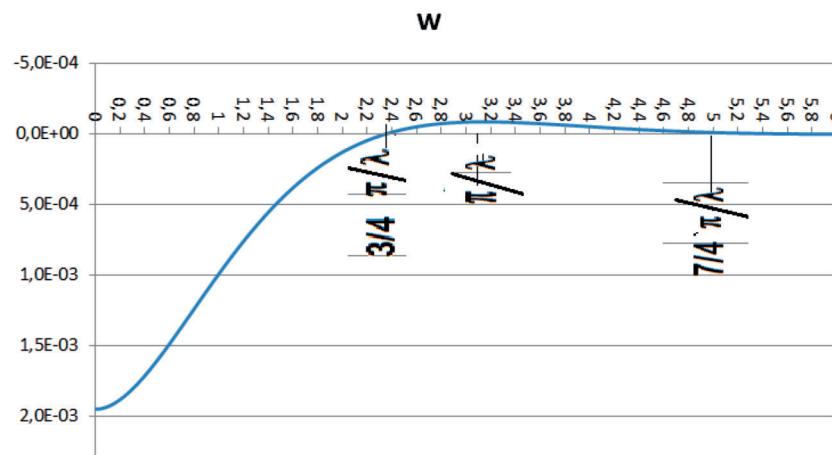


Figura 3 - Funzione  $w - q/k$  per  $P = 100$  kN e per  $\lambda = 1$   $m^{-1}$ .  
Figure 3 - Function  $w - q/k$  for  $P = 100$  kN and for  $\lambda = 1 m^{-1}$ .

da cui si osserva che  $\theta(0)$  e  $w(0)$  sono combinazioni lineari di  $M_i(0)$  e di  $T(0)$ ; in particolare si ha

$$\theta(0) = \frac{4M_i(0)\lambda^3}{k} - \frac{2T(0)\lambda^2}{k}$$

$$w(0) = -\frac{2M_i(0)\lambda^2}{k} + \frac{2T(0)\lambda}{k} + q/k$$

### 3.2. Trave infinita da ambo il lati, con solo carico $P$ in $x=0$

Essendo, per la simmetria

$$T(0) = P/2 \text{ e } \theta(0) = 0$$

si ottiene

$$0 = 4M_i(0)\lambda - P$$

$$kw(0)/\lambda = -2M_i(0)\lambda + P + q/\lambda$$

Ossia

$$M_i(0) = \frac{P}{4\lambda}$$

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} + q/k$$

Trascurando il termine in  $q$  (operazione lecita come si vedrà in seguito) si ottiene, per i casi correntemente ritenuti come estremi di  $C_w$  cui corrisponde come già detto per la rotaia 60E1 una  $\lambda = 0,808 - 1,439$  e sostituendo in  $w(0) = \frac{P\lambda}{2k}$ ,  $k = 4EJ\lambda^4$  si ha

$$w(0) = \frac{P}{8EJ\lambda^3}$$

$$\text{e con } \frac{P}{8EJ} = \frac{1}{6415500} \text{ } 1000 \text{ } \frac{100000}{8} = 1,984$$

$$w(0) = \frac{1,984}{\lambda^3} \text{ mm}$$

si ottengono gli estremi del cedimento  $w = 3,693 - 0,654$  mm;

Invece, il momento sarà compreso tra  $30940 - 17373$  Nm.

$w'' +$  if  $w'$  change is positive

$w''' +$  if  $w''$  change is positive

Being  $w'' = \frac{M_i}{EJ}$ , being  $M_i +$ , if superior fibres are stretched

$w'' = \frac{T}{EJ}$ , being  $T +$ , if the rotation is obtained

$$\theta(0) = \frac{M_i(0)}{\lambda EJ} + \frac{T(0)}{2\lambda^2 EJ}$$

and the subsidence

$$w(0) = +\frac{M_i(0)}{2\lambda^2 EJ} + \frac{T(0)}{2\lambda^3 EJ} + q/k$$

But being  $EJ = \frac{k}{4\lambda^4}$

$$\theta(0) = \frac{4M_i(0)\lambda^3}{k} - \frac{2T(0)\lambda^2}{k}$$

$$w(0) = -\frac{2M_i(0)\lambda^2}{k} + \frac{2T(0)\lambda}{k} + q/k$$

from which it is observed that are linear combinations of  $M_i(0)$  and  $T(0)$ ; in particular, we have

$$\theta(0) = \frac{4M_i(0)\lambda^3}{k} - \frac{2T(0)\lambda^2}{k}$$

$$w(0) = -\frac{2M_i(0)\lambda^2}{k} + \frac{2T(0)\lambda}{k} + q/k$$

### 3.2. Infinite beam on both sides, with only load $P$ in $x=0$

Being, for the symmetry

$$T(0) = P/2 \text{ and } \theta(0) = 0$$

results in

$$0 = 4M_i(0)\lambda - P$$

$$kw(0)/\lambda = -2M_i(0)\lambda + P + q/\lambda$$

That is

$$M_i(0) = \frac{P}{4\lambda}$$

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} + q/k$$

Neglecting the term in  $q$  (licit operation as will be seen below) we obtain, for the cases currently considered as extremes of  $C_w$  which corresponds to as already said for the rail 60E1 a  $\lambda = 0.808 - 1.439$  and replacing in, we have  $w(0) = \frac{P\lambda}{2k}$ ,  $k = 4EJ\lambda^4$  we have

$$w(0) = \frac{P}{8EJ\lambda^3}$$

$$\text{and with } \frac{P}{8EJ} = \frac{1}{6415500} \text{ } 1000 \text{ } \frac{100000}{8} = 1,984$$

$$w(0) = \frac{1,984}{\lambda^3} \text{ mm}$$

the subsidence extremes  $w = 3.693 - 0.654$  mm are obtained;

Instead, the moment will be between  $30940 - 17373$  Nm.

## SCIENZA E TECNICA

La linea di influenza del cedimento (Fig. 3) è

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-x\lambda} (\sin x\lambda + \cos x\lambda) + q/k$$

La linea di influenza del momento (Fig. 4) è

$$M_i(x) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$$

La linea di influenza del taglio è

$$T(x) = \frac{p}{2} e^{-x\lambda} \cos x\lambda$$

Di seguito (Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 e Fig. 8) alcuni grafici rappresentativi delle grandezze in esame (sottocarico, quindi valori massimi) per alcuni tipi di rotaie (U 33, UNI 50, 60E1) [traversa m. 2,60] in funzione di  $C_w$ .

Come da attese, i cedimenti e le tensioni diminuiscono con l'aumento della rigidezza lineica dell'appoggio e con il modulo di inerzia della rotaia. Invece, le reazioni lineiche aumentano con la rigidezza ( $p = P/2\lambda$ ).

Il fattore lavoro specifico rappresenta l'energia messa in gioco dal sistema (rotaia, piastra sottorotaia, sottofondo); anche questo diminuisce con la rigidezza<sup>7</sup> (Tab. 1).

Le distanze, in m dal carico, del 1° annullamento del momento, del taglio, del cedimento e della rotazione per rotaia del tipo 60E1.

Alcune considerazioni:

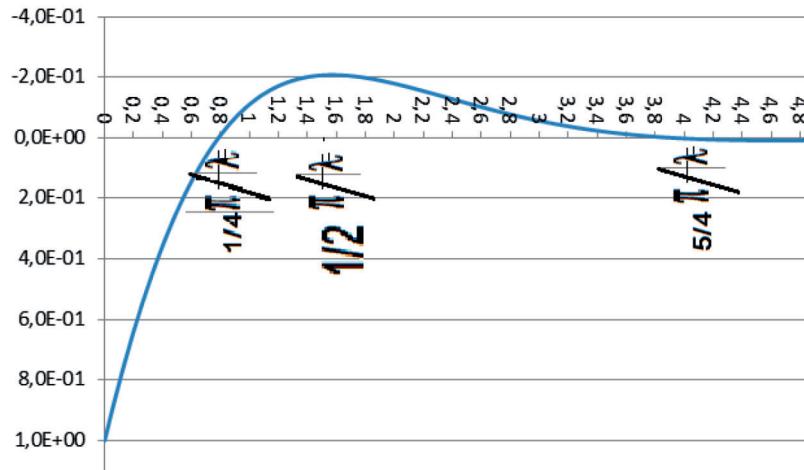


Figura 4 - Funzione  $e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$ .  
Figure 4 - Function  $e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$ .

<sup>7</sup> In un sistema di 2 molle in serie di rigidezza  $K_1$  e  $K_2$  il lavoro per un cedimento applicato da una forza  $P$  è dato da  $P/2 \cdot 1/K_1 (1+\eta)/\eta$  con  $\eta=K_2/K_1$ . Per  $\eta \gg 1$  il lavoro è prevalentemente eseguito dalla molla più cedevole. Perciò l'inserimento di un tappetino in gomma sotto la traversa protegge il pietrisco riducendo la quota di lavoro e, quindi, l'usura.

The line of influence of the subsidence (Fig. 3) is

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-x\lambda} (\sin x\lambda + \cos x\lambda) + q/k$$

The line of influence of the moment (Fig. 4) is

$$M_i(x) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$$

The line of influence of the shear stress is

$$T(x) = \frac{p}{2} e^{-x\lambda} \cos x\lambda$$

Below (Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 and Fig. 8) are some representative graphs of the quantities in question (under load, therefore maximum values) for some types of rails (U 33, UNI 50, 60E1) [sleeper m. 2,60] as a function of  $C_w$ .

As expected, subsidences and stresses decrease with the increase in the linear stiffness of the support and with the inertia module of the rail. Instead, linear reactions increase with stiffness ( $p = P/2\lambda$ ).

The specific work factor represents the energy put into play by the system (rail, baseplate, substrate); this also decreases with rigidity<sup>7</sup> (Tab. 1).

The distances, in m from the load, of the 1<sup>st</sup> moment cancellation, of the shear, of the subsidence and of the rotation per type 60E1 rail.

Some considerations:

- the subsidences for rigid track are close to the millimetre for the three types of rail (light, medium, heavy), for the subsiding rail they differ from 3.1 to 5.5 mm;
- the sigma tensions in light rail and subsiding track are about three times those of 60E1 rail on rigid track.

### 4. Infinite beam subjected to two loads

A bogie with  $p$  pitch is considered.

Being, for the infinite beam on both sides

$$M(0) = \frac{P}{4\lambda}$$

remembering that

$$M(x) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$$

said  $x$  the distance between the

<sup>7</sup> In a system of 2 springs in series of stiffness  $K_1$  and  $K_2$  the work for a subsidence applied by a force  $P$  is given by  $P/2 \cdot 1/K_1 (1+\eta)/\eta$  with  $\eta=K_2/K_1$ . For  $\eta \gg 1$  the work is mainly performed by the most subsiding spring. Therefore, the introduction of a rubber mat under the sleeper protects the gravel by reducing its working height and, therefore, wear.

## SCIENZA E TECNICA

- cedimenti per binario rigido sono prossimi al millimetro per i tre tipi di rotaia (leggera, media, pesante), per quello cedevole si differenziano da 3,1 a 5,5 mm;
- le tensioni sigma in rotaia leggera e binario cedevole sono circa il triplo di quelle della rotaia 60E1 su binario rigido.

### 4. Trave infinita soggetta due carichi

Si considera un carrello di passo  $p$ .

Essendo, per la trave infinita da ambo i lati

$$M(0) = \frac{P}{4\lambda}$$

ricordando che

$$M(x) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} e^{-x\lambda} (\cos x\lambda - \sin x\lambda)$$

detta  $x$  la distanza tra punto di misura e punto centrale del carrello (con  $x < d/p/2$ ), per il carico 1 si ha, tra punto di misura e carico,  $(-x + p/2)$  e per il carico 2  $(x + p/2)$ ; se ciascun carico di entità vale  $P$ , si ottiene, per la sovrapposizione degli effetti, il momento nel punto di misura;

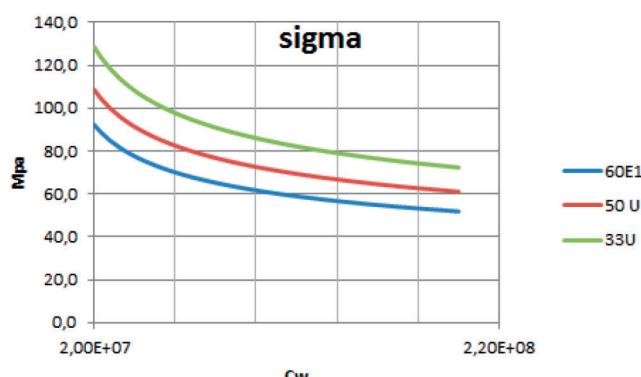


Figura 6 – Tensioni sezione sottocarica.  
Figure 6 – Section under load tensions.

Tabella 1 – Table 1

Progressivo primo annullamento linee di influenza  
Progressive first cancellation of influence lines

Cw	$\lambda$	ann. M can. M	ann. T can. T	ann. w can. w	ann. rot can. rail
2,00E+07	8,09E-01	0,97	1,94	2,91	3,88
2,00E+08	1,44E+00	0,55	1,09	1,64	2,18

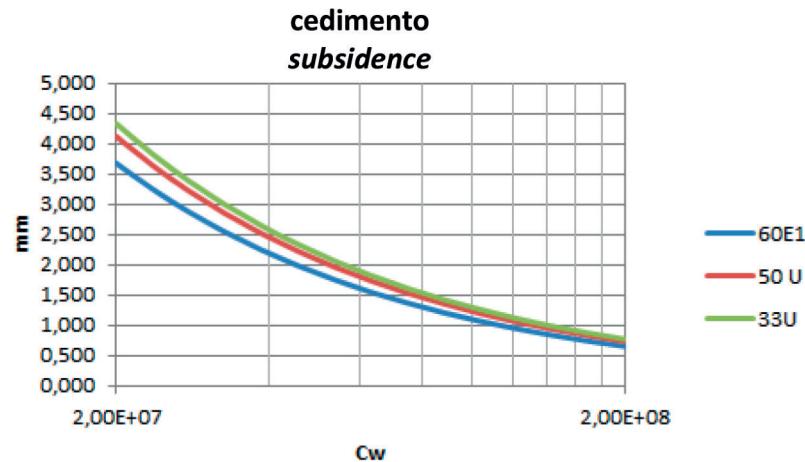


Figura 5 – Cedimenti sottocarico.  
Figure 5 – Subsidence under load.

measuring point and the central point of the bogie (with  $x < d/p/2$ ), for load 1 we have, between measuring point and load,  $(-x + p/2)$  and for load 2  $(x + p/2)$ ; if each entity load is  $P$ , the moment at the measuring point is obtained, by the superposition of the effects;

$$M(P1 + P2) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} [e^{-|-x+\frac{p}{2}|\lambda} (\cos(-x + \frac{p}{2})\lambda - \sin(-x + \frac{p}{2})\lambda) + e^{-(x+\frac{p}{2})\lambda} (\cos(x + \frac{p}{2})\lambda - \sin(x + \frac{p}{2})\lambda)] \quad (\text{Eq. 2})$$

For  $x = 0$  we have

$$M(P1 + P2) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} 2 [e^{-(\frac{p}{2})\lambda} (\cos(\frac{p}{2})\lambda - \sin(\frac{p}{2})\lambda)]$$

and it is the minimum value (shear cancellation); this will be less than 0 if

$$(\cos(\frac{p}{2})\lambda - \sin(\frac{p}{2})\lambda) < 0$$

so when

$$p\lambda > 2 \arctan 1 = 1,57$$

For  $x = p/2$  (displacement of the pin to the left) we have the moment under load, which will be the maximum moment

$$M(P1 + P2) = \frac{P}{\lambda} \frac{1}{4} [1 + e^{-(p)\lambda} (\cos(p)\lambda - \sin(p)\lambda)]$$

Hence, the position of a wheel on the measuring section results in the maximum of the moment (Fig. 9).

Hence it is observed that since  $p \cdot \lambda$  can be between 0.8 · 1.8 and  $4.5 \cdot 1.4 = 1.44$  and 6.33, the maximum value of the moment is always less than 1.

The loading rate acting on a sleeper assigned at a distance  $d_1$  and  $d_2$  from the two wheels of the bogie is given by the respective differences of the shears calculated at the sleeper in question: that is

## SCIENZA E TECNICA

$$M(P1 + P2) = \frac{P_1}{\lambda/4} [e^{-|x+\frac{p}{2}|\lambda} (\cos(-x + \frac{p}{2})\lambda - \sin(-x + \frac{p}{2})\lambda) + e^{-(x+\frac{p}{2})\lambda} (\cos(x + \frac{p}{2})\lambda - \sin(x + \frac{p}{2})\lambda)] \quad (\text{Eq. 2})$$

Per  $x = 0$  si ha

$$M(P1 + P2) = \frac{P_1}{\lambda/4} 2[e^{-\frac{p}{2}\lambda} (\cos(\frac{p}{2})\lambda - \sin(\frac{p}{2})\lambda)]$$

ed è il valore minimo (annullamento del taglio); questo sarà minore di 0 se

$$(\cos(\frac{p}{2})\lambda - \sin(\frac{p}{2})\lambda) < 0$$

quindi quando

$$p\lambda > 2 \arctan 1 = 1,57$$

Per  $x = p/2$  (spostamento del perno verso sx) si ha il momento sotto carico, che sarà il momento massimo

$$M(P1 + P2) = \frac{P_1}{\lambda/4} [1 + e^{-(p)\lambda} (\cos(p)\lambda - \sin(p)\lambda)]$$

Quindi, la posizione di una ruota sulla sezione di misura comporta il massimo del momento (Fig. 9).

Da cui si osserva che potendo essere  $p \cdot \lambda$  compreso tra  $0,8 \cdot 1,8$  e  $4,5 \cdot 1,4 = 1,44$  e  $6,33$ , il, valore massimo del momento è sempre minore di 1 (Fig. 10).

La rata di carico agente su una assegnata traversa a di-

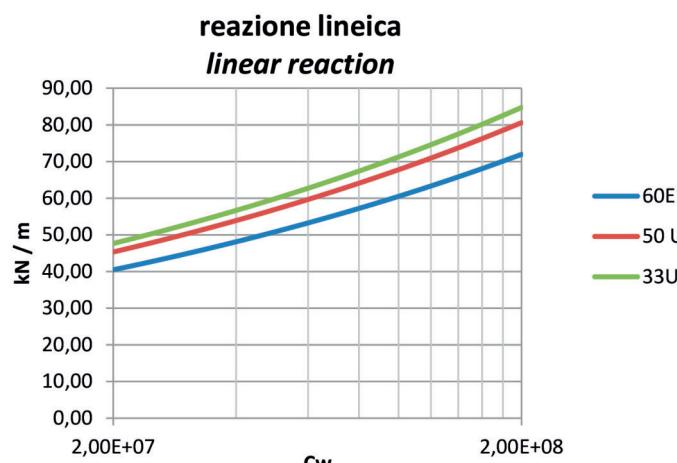


Figura 7 – Reazione lineica sottocarico.  
Figure 7 – Linear reaction under load.

stanza  $d_1$  e  $d_2$  dalle due ruote del carrello è data dalle rispettive differenze dei tagli calcolati a cavallo della traversa in esame: cioè

$$R = \frac{P_1}{2} \left[ e^{-(d_1+\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_1 + \frac{I}{2}\right)\lambda - e^{-(d_1-\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_1 - \frac{I}{2}\right)\lambda \right] + \frac{P_2}{2} \left[ e^{-(d_2+\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_2 + \frac{I}{2}\right)\lambda - e^{-(d_2-\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_2 - \frac{I}{2}\right)\lambda \right]$$

$$R = \frac{P_1}{2} \left[ e^{-(d_1+\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_1 + \frac{I}{2}\right)\lambda - e^{-(d_1-\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_1 - \frac{I}{2}\right)\lambda \right] + \frac{P_2}{2} \left[ e^{-(d_2+\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_2 + \frac{I}{2}\right)\lambda - e^{-(d_2-\frac{I}{2})\lambda} \cos\left(d_2 - \frac{I}{2}\right)\lambda \right]$$

If we put  $P_1 = P_2$  pitch of the bogie  $p=1.8$  m, 0.6 m between the sleepers, the calculation provides that the loading rate on the sleeper in question is that of the insistent load plus that due to the adjacent load: this amount is equivalent to that of the sleeper distant as the pitch (Fig. 11).

In this case, since the wheel is adjacent to sleeper 4, the sleeper is subject to a total load of 0.3 P

In this case, since the wheel is still adjacent to sleeper 4, the sleeper is subject to a total load of 0.4 P.

### 5. Non-bilateral nature of the constraint

As anticipated in par. 3, the behaviour of the support is schematised (with all the conventionalities mentioned) as a diffused reacting elastic spring with both compressive and tensile stiffness  $k$ . Obviously, the platform, the gravel and the rubber plate do not react to traction but, moreover, can be unloaded from the preload (that is, the sum of the weight of the rail, the sleeper and, strictly speaking, part of the gravel itself).

The line of influence of the subsidence is

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-x\lambda} (\sin x\lambda + \cos x\lambda) + q/k$$

the first term becomes negative starting from  $x = \frac{3}{4} \pi/\lambda$  and up to  $x = \frac{7}{4} \pi/\lambda$

The minimum of  $w$  is obtained by

$$w'(x) = \frac{P\lambda}{2k} \lambda e^{-x\lambda} 2 \sin x\lambda = 0$$

from which  $x(w_{\min}) = \pi/\lambda$

Therefore

$$w(x)_{\min} = \frac{1}{k} \left( -\frac{P\lambda}{2} e^{-\pi} + q \right)$$

Being, basically  $\lambda = 0.8 - 1.4 m^{-1}$ , the spring goes into traction when

$$q/P \leq \lambda e^{-\pi}$$

i.e. for  $q/P = < 0.034 - 0.060 m^{-1}$ .

With  $P = 100$  kN if  $q = 3.4 - 6.0$  kN/m.

A track, with 60E1 rails, 2.30 m precast concrete sleepers and 35 cm thick gravel under the sleeper, weighs about 14 kN per m (for each rail) of which about 10 kN of gravel and, therefore, in principle it can be considered that there is no traction in the diffused spring and that, therefore, neglecting the term  $q/k$  is acceptable, as normally occurs.

## SCIENZA E TECNICA

Se si pone  $P_1 = P_2$  passo del carrello  $p=1,8$  m, interasse traverse 0,6 m il calcolo fornisce che la rata di carico sulla traversa in esame è quella propria del carico insistente più quella dovuta al carico adiacente: questa quota equivale a quella della traversa distante il passo (Fig. 11).

In questo caso, essendo la ruota adiacente sulla traversa 4, la traversa è soggetta ad un carico complessivo di 0,3 P (Fig. 12).

In questo caso, essendo la ruota adiacente ancora sulla traversa 4, la traversa è soggetta ad un carico complessivo di circa 0,4 P.

### 5. Non bilateralità del vincolo

Come anticipato al par. 3, il comportamento dell'ap-

### lavoro specifico dell'appoggio specific support work

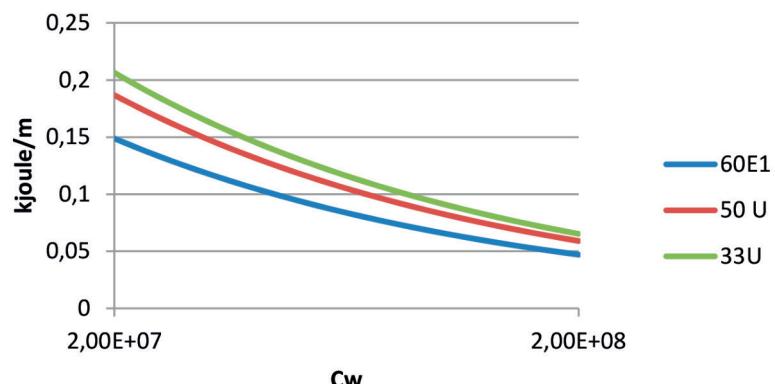


Figura 8 – Lavoro specifico della sezione sottocarico.  
Figure 8 – Specific work of the section under load.

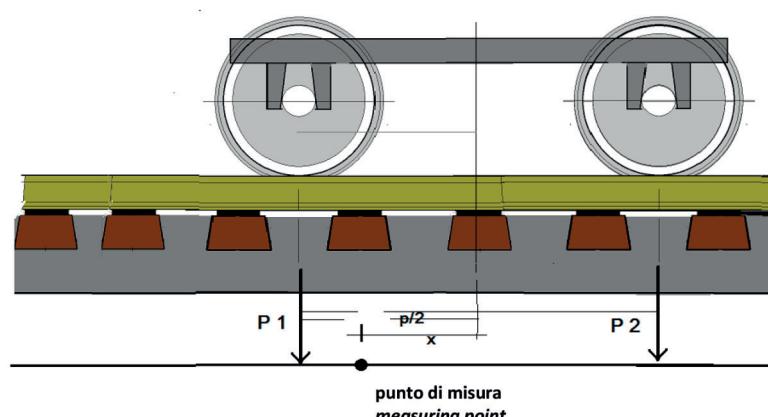


Figura 9 – Posizionamento del carrello sul punto di misura.  
Figure 9 – Positioning of the bogie on the measuring point.

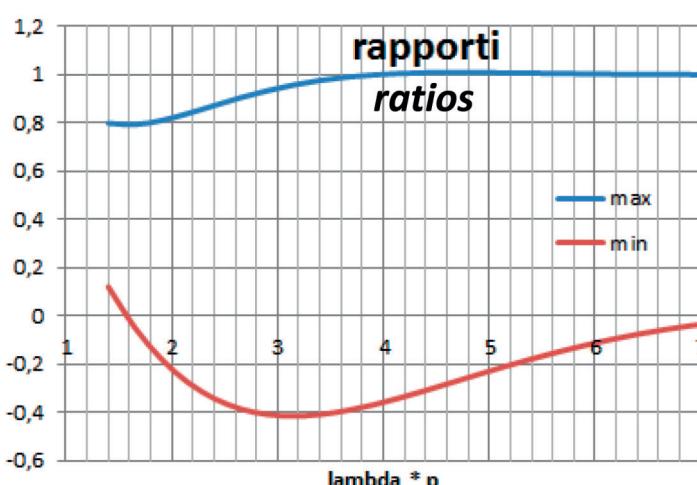


Figura 9 - Rapporti tra M max e M min / M max carico isolato.  
Figure 9 - Ratios between M max and M min / M max point load.

### 6. Applicability of the elastic beam calculation model

From the expression of the loading rate of the sleeper under load

$$R/P = \left[ 1 - e^{-\left(\frac{I}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{I}{2}\right)\lambda \right]$$

the limit of application of the elastic beam calculation model is obtained: in fact, there is a coefficient  $C_w$  for which

$$1 - e^{-\left(\frac{I}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{I}{2}\right)\lambda = \max$$

that is, when the progressive cancellation of the reaction (derivative of the shear) coincides with the halfway point of the sleepers.

In fact, if this reaction cancels out over a distance of less than  $i/2$ , it means that there are simultaneously positive and negative reactions in the support area of the sleeper and, therefore, as the subgrade coefficient increases, the loading rate would decrease.

This occurs when with  $i = 0.6$  m we have  $\lambda = 7.854$  corresponding to  $C_w = 1.78+11$ , a value of 3 orders of magnitude higher than that representative of a rigid track. It can therefore be said that the model, is absolutely responsive in concrete terms.

An effective limit is that connected to the fact that the model in question does not give any information on the different deformations and stresses that occur in the two different load situations: above the sleeper and in the middle of the division.

## SCIENZA E TECNICA

poggio è schematizzato (con tutte le convenzionalità accennate) come una molla elastica diffusa reagente con una rigidezza  $k$  sia a compressione che a trazione. Evidentemente la piattaforma, il pietrisco e la piastra in gomma non reagiscono a trazione ma, tutt'alpiù, possono scaricarsi del precarico (cioè la somma del peso proprio della rotaia, della traversa ed, a rigore, di quota parte del pietrisco medesimo).

Essendo la linea di influenza del cedimento

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-x\lambda} (\sin x\lambda + \cos x\lambda) + q/k$$

il primo termine diventa negativo a partire da  $x = \frac{3}{4}\pi/\lambda$  e fino a  $x = \frac{7}{4}\pi/\lambda$

Il minimo di  $w$  si ottiene per

$$w'(x) = \frac{P\lambda}{2k} \lambda e^{-x\lambda} 2 \sin x\lambda = 0$$

da cui  $x(w_{\min}) = \pi/\lambda$

Quindi

$$w(x)_{\min} = \frac{1}{k} \left( -\frac{P\lambda}{2} e^{-\pi} + q \right)$$

Essendo, in pratica,  $\lambda = 0,8 - 1,4 \text{ m}^{-1}$ , si ha che la molla va in trazione quando

$$q/P \leq \lambda e^{-\pi}$$

ossia per  $q/P = < 0,034 - 0,060 \text{ m}^{-1}$ .

Con  $P = 100 \text{ kN}$  si ha  $q = 3,4 - 6,0 \text{ kN/m}$

Un binario, con rotaie del 60E1, traverse in cap da  $m 2,30$  e pietrisco di spessore 35 cm sotto traversa, pesa circa 14 kN al m (per ciascuna rotaia) di cui circa 10 kN di pietrisco e, quindi, in linea di massima si può, allora, considerare che non si abbia trazione nella molla diffusa e che, pertanto, trascurare il termine  $q/k$  sia accettabile, come si usa normalmente.

### 6. Applicabilità del modello di calcolo della trave elastica

Dalla espressione della rata di carico della traversa sottocarico

$$R/P = \left[ 1 - e^{-\left(\frac{I}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{I}{2}\right)\lambda \right]$$

si ottiene il limite di applicazione del modello di calcolo della trave elastica: infatti, esiste un coefficiente  $C_w$  per il quale

$$1 - e^{-\left(\frac{I}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{I}{2}\right)\lambda = \max$$

cioè quando la progressiva di an-

To analyse the case, it is necessary to set the beam as on discrete interspersed supports of the division of the sleepers and on a suitable number of supports to mitigate the imprecision of schematising the unlimited beam with a diagram (Fig. 13) necessarily limited.

A beam is calculated on 18 supports, 16 lateral spans of  $i$  length, central span  $b$  length, position of the unit load in central span at distance  $x$  from support 9.

The criterion of the 4-moment equation applies; its development is in Appendix A.

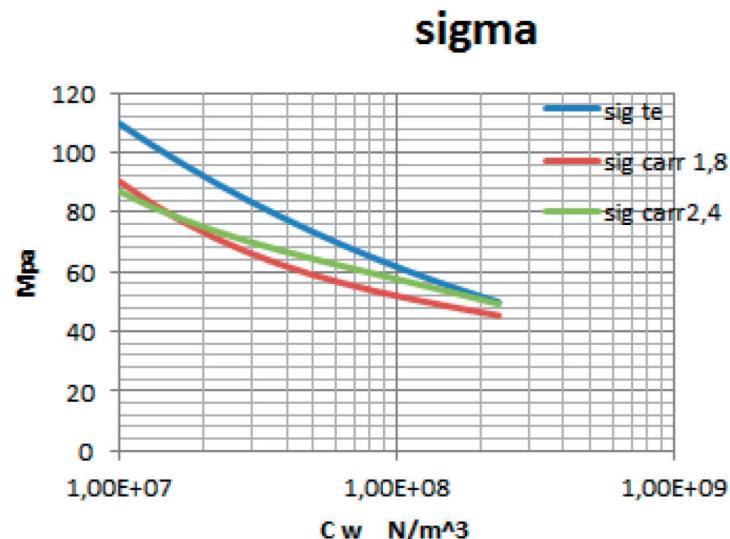


Figura 10 - Variazione delle tensioni ( $\sigma_{te}$  = asse isolato) con il coefficiente di sottofondo.

Figure 10 - Tension variation ( $\sigma_{te}$  = single axis) with the subgrade coefficient.

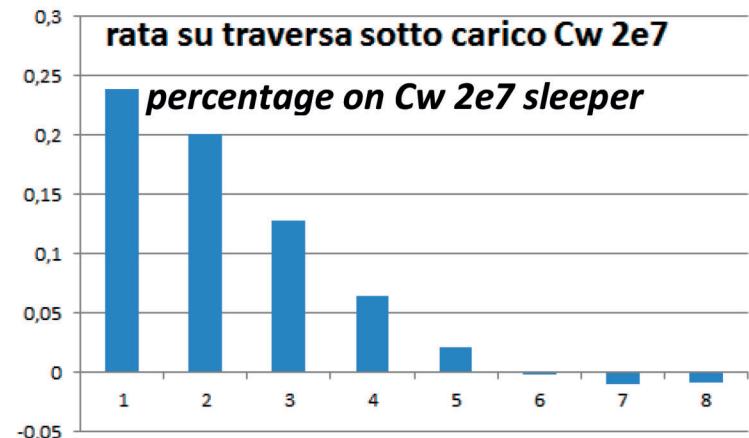


Figura 11 - Percentuale di carico agente sulla traversa sottocarico  $P_1$ .

Figure 11 - Percentage of load acting on sleeper  $P_1$  under load.

## SCIENZA E TECNICA

nullamento della reazione (derivata del taglio) coincide con il seminterasse delle traverse.

Infatti, se tale reazione si annulla su una distanza inferiore a  $i/2$  significa che nella zona di appoggio della traversa sussistono contemporaneamente reazioni positive e negative e, quindi al crescere del coefficiente di sottofondo la rata di carico diminuirebbe.

Ciò avviene quando con  $i = 0,6$  m si ha  $\lambda = 7,854$  corrispondente a  $C_w = 1,78+11$ , valore di 3 ordini di grandezza superiore a quello rappresentativo di binario rigido. Si può, quindi, affermare che il modello, nella pratica, è assolutamente rispondente.

Un limite effettivo è quello connesso al fatto che il modello in esame non dà alcuna informazione sulle differenti deformazioni e sollecitazioni che si hanno nelle due diverse situazioni di carico: sopra la traversa ed in mezzeria dello spartito.

Per analizzare il caso, occorre impostare la trave come su appoggi discreti intervallati dello spartito delle traverse e su un congruo numero di appoggi per attenuare l'imprecisione di schematizzare la trave illimitata con uno schema (Fig. 13) su necessariamente limitato.

Si calcola una trave su 18 appoggi, 16 campate laterali di lunghezza  $i$ , campata centrale lunghezza  $b$ , posizione del carico unitario in campata centrale alla distanza  $x$  dall'appoggio 9.

Si applica il criterio dell'equazione dei 4 momenti; il relativo sviluppo è in Appendice A.

Allo scopo di verificare l'errore che si commette in rapporto alla lunghezza finita della trave ed al fatto che ponendo il carico su un appoggio il carico non è più centrato (le due semitravi non sono simmetriche) si opera il calcolo su una trave continua su appoggi elastici costituita da 22 aste (semilunghezza = 6,6 m)

Lo schema di calcolo è come in Fig. 14.

Il relativo sviluppo dei calcoli è in Appendice B.

Si esegue, allora, il confronto (Fig. 15, Fig. 16 e Fig. 17) tra i 3 criteri:

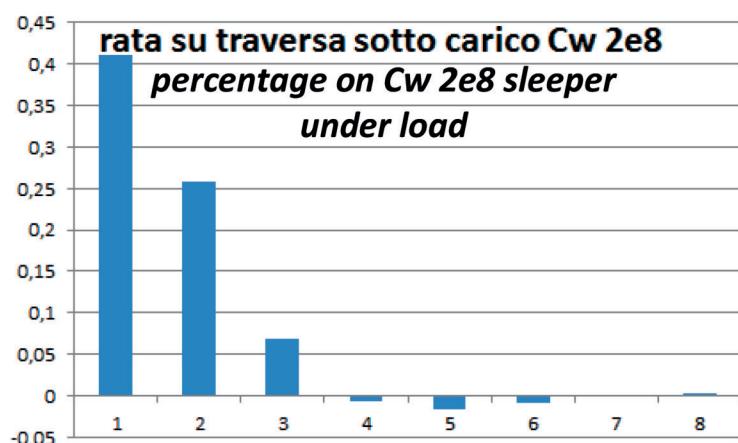


Figura 12 – Percentuale di carico agente sulla traversa sottocarico  $P_r$   
Figure 12 – Percentage of load acting on sleeper  $P_r$ , under load.

In order to verify the mistake made in relation to the finite length of the beam and the fact that by placing the load on a support, the load is no longer centred (the two half base beams are not symmetrical), the calculation is carried out on a continuous beam on elastic supports consisting of 22 rods (half-length = 6.6 m)

The calculation scheme is as shown in Fig. 14.

The relative development of the calculations is in Appendix B.

A comparison (Fig. 15, Fig. 16 and Fig. 17) is then made between the 3 criteria:

- limited beam on 18 load supports in the centreline and on support 9;
- limited beam on 23 supports, load on central support;
- unlimited beam on continuous support (elastic beam).

The graphs show the substantial identity of results between the calculation performed with the criterion of discrete supports (equation of 4 moments) and that of continuous support (elastic beam). Tab. 2 which follows shows the various trends in subsiding quantities and rates.

In the graphs of Fig. 18, Fig. 19, Fig. 20 and Fig. 21 the loading rates for load on supports and in the centreline

from which it can be seen that the difference in subsidence between the centreline and the support is 161/1000

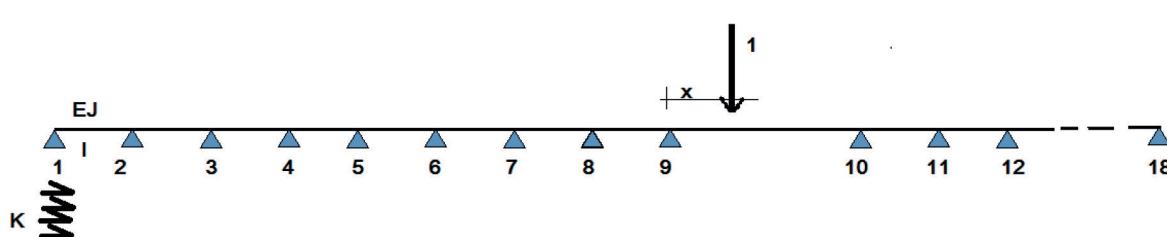


Figura 13 - Schema di calcolo della trave continua su appoggi discreti (18 appoggi).  
Figure 13 - Calculation diagram of the continuous beam on discrete supports (18 supports).

## SCIENZA E TECNICA

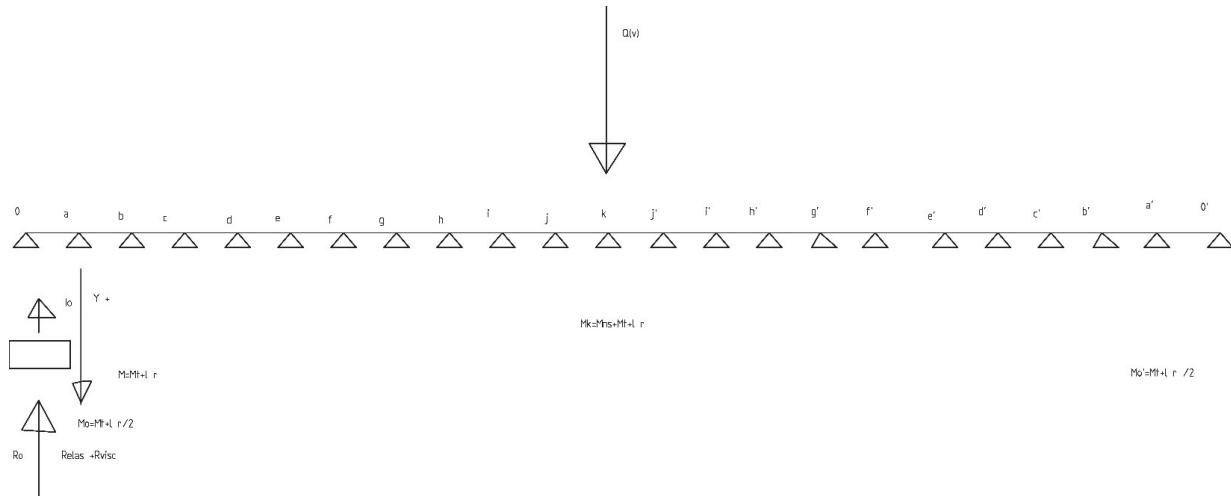


Figura 14 - Schema di calcolo della trave continua su appoggi discreti (23 appoggi).  
Figure 14 - Calculation diagram of the continuous beam on discrete supports (23 supports).

- trave limitata su 18 appoggi carico in mezzeria e su appoggio 9;
- trave limitata su 23 appoggi, carico su appoggio centrale;
- trave illimitata su appoggio continuo (t.e.).

Dai grafici emerge la sostanziale identità di risultati tra il calcolo eseguito con il criterio degli appoggi discreti (equazione dei 4 momenti) con quello dell'appoggio continuo (t.e.). Segue la Tab. 2 con i vari andamenti di grandezze e cedimenti e rate.

Nei grafici delle Fig. 18, Fig. 19, Fig. 20 e Fig. 21 seguenti le rate di carico per carico su appoggi ed in mezzeria da cui si osserva che la differenza di cedimento tra mezzeria a ed appoggio è di 161 /1000 e 25/1000 di mm rispettivamente per  $C_w = 2E7$  e  $2E8$  N/m $^3$ . Detti valori sono leggermente superiori a quelli che risulterebbero da un calcolo più preciso perché l'appoggio non è concentrato bensì distribuito dalla piastra in gomma sottorotaia; ne consegue una attenuazione del momento (Fig. 22) e, di conseguenza, del cedimento.

Naturalmente se si considera una rigidità tendente all'infinito la trave elastica fornisce un momento nullo mentre quella su appoggi discreti – con carico evidentemente in mezzeria – dà un momento dell'ordine dei 10 kN m.

Anche con tale metodo di calcolo si ottiene che la rata di carico della traversa sotto carico in presenza di un carrello  $p= 1,8$  m è di 41,9% e 30,6% rispettivamente per  $C_w = 2E7$  e  $2E8$  N/m $^3$ .

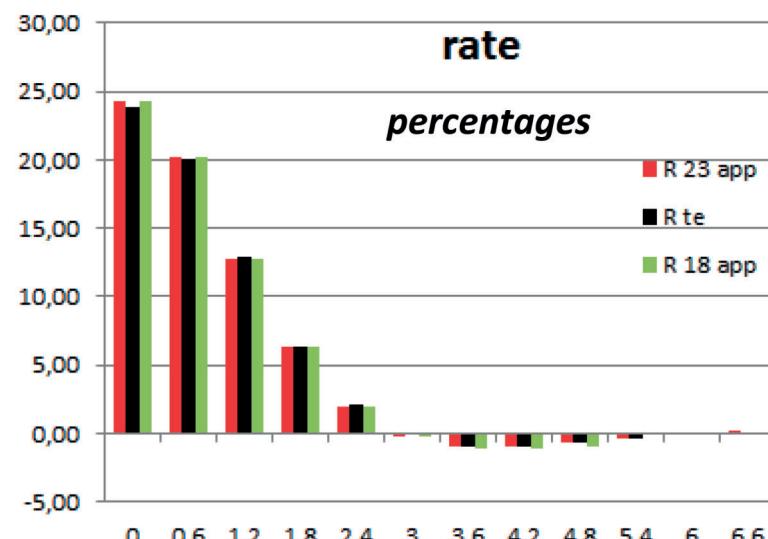


Figura 15 – Percentuali di carico traversa sottocarico.  
Figure 15 – Load percentages of sleeper under load.

and 25/1000 mm respectively for  $C_w = 2E7$  and  $2E8$  N/m $^3$ . These values are slightly higher than those that would result from a more precise calculation because the support is not concentrated but distributed by the under-rail rubber plate; this results in a mitigation of the moment (Fig. 22) and, consequently, of the subsidence.

Of course, if we consider a stiffness tending to infinity, the elastic beam provides a zero moment while the one on discrete supports – with a load evidently in the middle – gives a moment of the order of 10 kN m.

With this calculation method the loading rate of the sleeper under load in the presence of a bogie  $p= 1.8$  m is 41.9% and 30.6% respectively for  $C_w = 2E7$  and  $2E8$  N/m $^3$ .

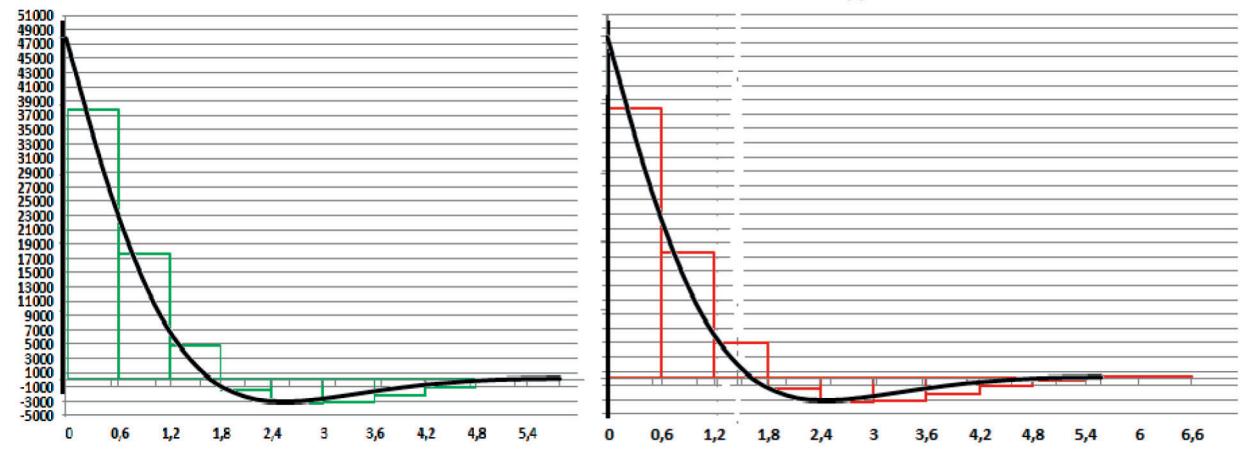
## SCIENZA E TECNICA

Tabella 2 – Table 2

Andamento grandezze cedimenti e rate

Trend in subsiding quantities and rates

Cw	ascissa calcolata dal carico abscissa calculated from the load	y appoggi discreti y discreet supports	Y TEY elastic beam	r% discreti r% discreet	r% continuo r% continuous	Cw	y appoggi discreti y discreet supports	Y TEY elastic beam	r% discreti r% discreet	r% continuo r% continuous
2,00E+08	0	0,6505	0,6540	42,93	41,01	2,00E+07	3,6766	3,6779	24,27	23,85
	0,6	0,3879	0,3889	25,60	25,76		3,0572	3,0580	20,18	20,06
	1,2	0,0970	0,0969	6,41	6,93		1,9357	1,9360	12,78	12,82
	1,8	-0,0159	-0,0161	-1,05	-0,78		0,9492	0,9494	6,26	6,36
	2,4	-0,0260	-0,0260	-1,72	-1,66		0,2996	0,3003	1,98	2,07
	3	-0,0114	-0,0114	-0,76	-0,77		-0,0344	-0,0327	-0,23	-0,16
	3,6	-0,0017	-0,0016	-0,11	-0,13		-0,1525	-0,1493	-1,01	-0,95
	4,2	0,0011	0,0011	0,07	0,07		-0,1548	-0,1501	-1,02	-0,98
	4,8	0,0009	0,0009	0,06	0,06		-0,1116	-0,1069	-0,74	-0,70
	5,4	0,0003	0,0003	0,02	0,02		-0,0607	-0,0595	-0,40	-0,40
	6	0,0000	0,0000	0,00	0,00		-0,0153	-0,0243	-0,10	-0,16
	6,6	-0,0001	-0,0001	-0,01	0,00		0,0251	-0,0039	0,17	-0,03

18 app. e t.e.  
18 supports and elastic beam23 app. e t.e.  
23 supports and elastic beamFigura 16 – Andamento del taglio.  
Figure 16 – Shear stress trend.

## 7. Applicazione: discontinuità di rigidezza

Si abbia, in corrispondenza di una sezione S di binario, una brusca discontinuità di rigidezza (Fig. 23): a dx si ha  $C_w$  ed a sx  $C_{w'}$ .

Nella sezione S è applicato un carico P (Fig. 24).

## 7. Application: stiffness discontinuity

There is, in correspondence with a section S of track, an abrupt discontinuity of stiffness (Fig. 23): on the right we have  $C_w$  and on the left  $C_{w'}$ .

In section S a P load is applied (Fig. 24).

## SCIENZA E TECNICA

Dalle

$$w(x) = e^{-x\lambda} (C_1 \sin x\lambda + C_2 \cos x\lambda)$$

derivando, imponendo la congruenza degli spostamenti e delle rotazioni dei 2 tronchi, uguagliando i momenti e ponendo

$$\frac{\lambda}{\lambda} = \rho \text{ si ha}$$

lo spostamento del punto di applicazione del carico, la rotazione ed il momento

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} \frac{4}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]}$$

$$w(0)' = \frac{2P\lambda^2}{k} \left( \frac{\rho - 1}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]} \right)$$

$$M(0) = -\frac{P}{4\lambda} \frac{4\rho}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]}$$

Considerando  $w(te)$  ed  $M(te)$ , quelli che si hanno su trave elastica corrente.

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k}$$

$$\text{Per } \rho = 1 \quad M(0) = -\frac{P}{4\lambda}$$

Per  $\rho \gg 1$

$$w(0) = 0$$

$$M(0) = 0$$

Per  $\rho \ll 1$

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} \quad 4$$

$$M(0) = 0$$

Evidentemente

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{C_w}{C_w}}$$

Quindi, per un salto di 10, il rapporto vale 1,78.

Si calcola una applicazione esemplificativa (Tab. 3).

La ruota, pesante 100 kN e viag-  
giante a 160/3,6 m/s, si trova (punto iniziale) su un appoggio di rigidezza  $C_w = 2E7$  e si trasferisce (punto finale) su un appoggio di rigidezza  $C_w = 2E8$ .

Nel punto centrale la deformata ed il momento sono nei grafici di Fig. 25 e Fig. 26.

La traiettoria (Fig. 27) del punto di appoggio della ruota si ottiene, approssimativamente, imponendo che sia rappresentata da un polinomio del 5 grado, essendo note cinque condizioni cioè la quota iniziale = 0, la tg ini-

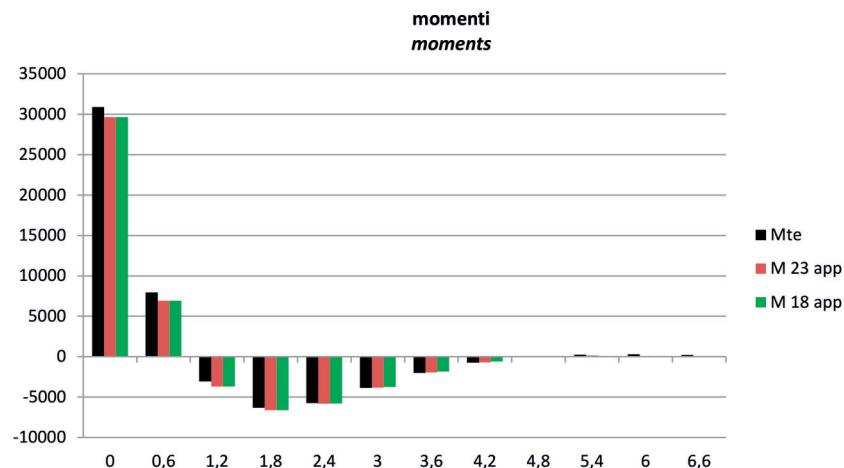


Figura 17 –Andamento dei momenti.

Figure 17 - Moments trend.

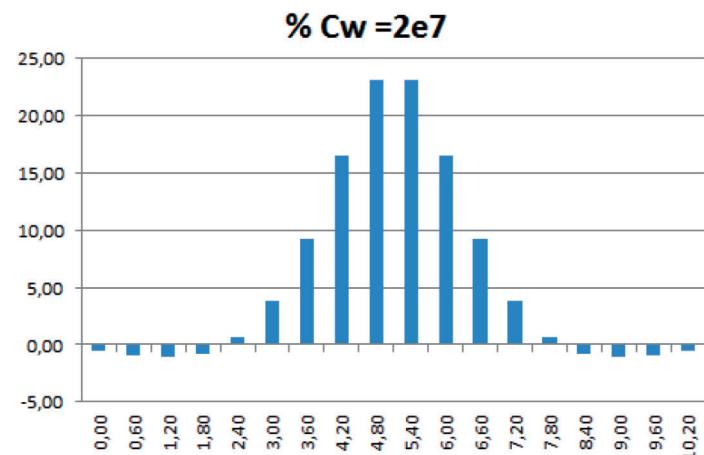


Figura 18 -  $C_w = 2E7$ , carico su mezzeria.

Figure 18 -  $C_w = 2E7$ , load on centreline.

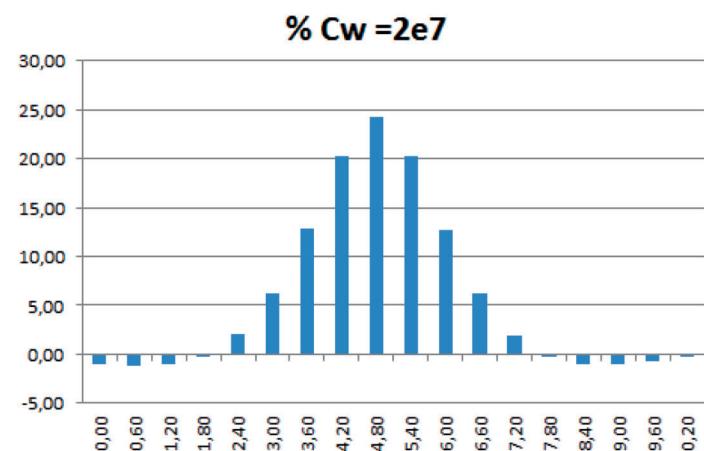


Figura 19 -  $C_w = 2E7$ , carico su appoggio.

Figure 19 -  $C_w = 2E7$ , load on support.

## SCIENZA E TECNICA

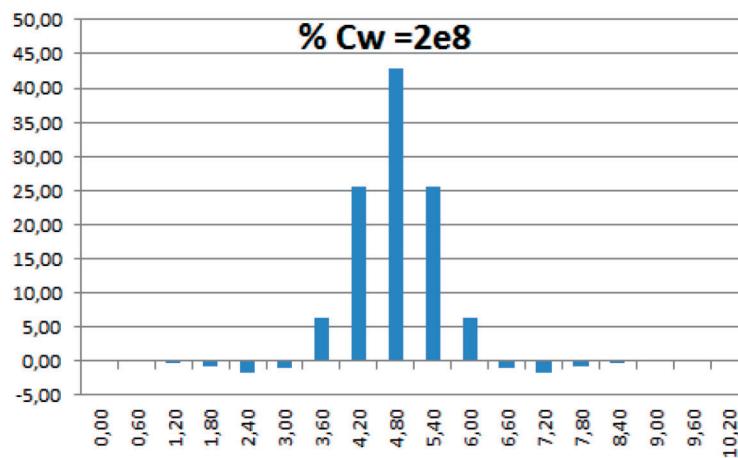


Figura 20 -  $C_w = 2E8$ , carico su appoggio.  
Figure 20 -  $C_w = 2E8$ , load on support.

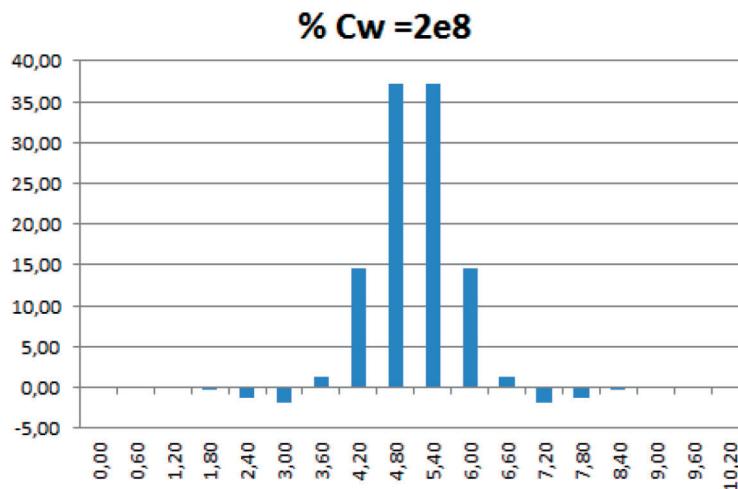


Figura 21 -  $C_w = 2E8$ , carico su mezzeria.  
Figure 21 -  $C_w = 2E8$ , load on centreline.

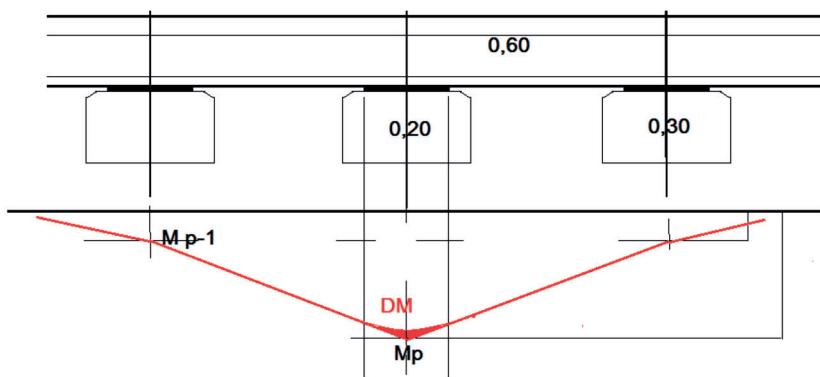


Figura 22 – Attenuazione del momento all'appoggio.  
Figure 22 – Mitigation of the moment on support.

From

$$w(x) = e^{-x\lambda} (C_1 \sin x\lambda + C_2 \cos x\lambda)$$

deriving, imposing the congruence of the displacements and rotations of the 2 sections, equalising the moments and placing

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} = \rho$$

we have

the displacement of the point of application of the load, the rotation and the moment

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} \frac{4}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]}$$

$$w(0)' = \frac{2P\lambda^2}{k} \left( \frac{\rho - 1}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]} \right)$$

$$M(0) = -\frac{P}{4\lambda} \frac{4\rho}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]}$$

Considering  $w$  (elastic beam) and  $M$  (elastic beam), those on the current elastic beam.

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k}$$

For  $\rho = 1$

$$M(0) = -\frac{P}{4\lambda}$$

For  $\rho \gg 1$

$$w(0) = \frac{P\lambda}{2k} \frac{4}{[(\rho + 1)(1 + \rho^2)]}$$

$$M(0) = 0$$

Evidently

$$\rho = \frac{\lambda_s}{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{C_w}{C_w'}}$$

so for a value of  $C_w'/C_w$  of 10, the value of the ratio is 1.78.

An example application is calculated (Tab. 3).

The wheel, weighing 100 kN and travelling at 160/3.6 m/s, is located (initial point) on a stiffness support  $C_w = 2E7$  and is transferred (final point) on a stiffness support  $C_w = 2E8$ .

In the central point the deflected shape and the moment are in the graphs of Fig. 25 and Fig. 26.

The trajectory (Fig. 27) of the support point of the wheel is obtained, approximately, by requiring that it be represented by a 5<sup>th</sup> degree polynomial, five conditions being known, i.e. the initial dimension = 0, the initial  $\tan \theta = 0$ , the in-

## SCIENZA E TECNICA

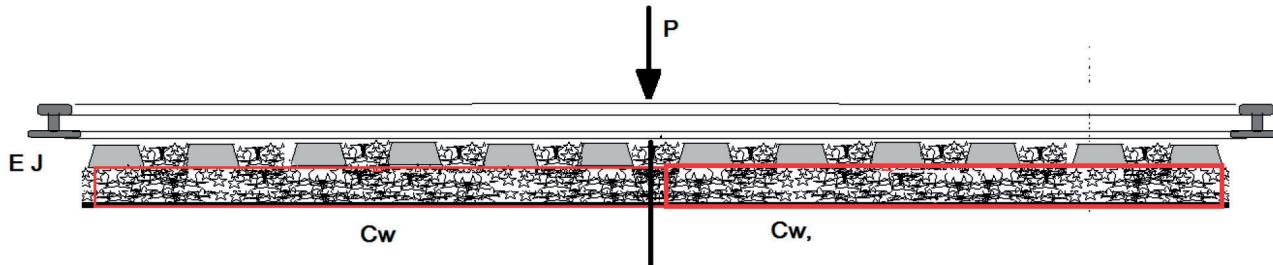


Figura 23 – Discontinuità di rigidezza del supporto.  
Figure 23 – Support stiffness discontinuity.

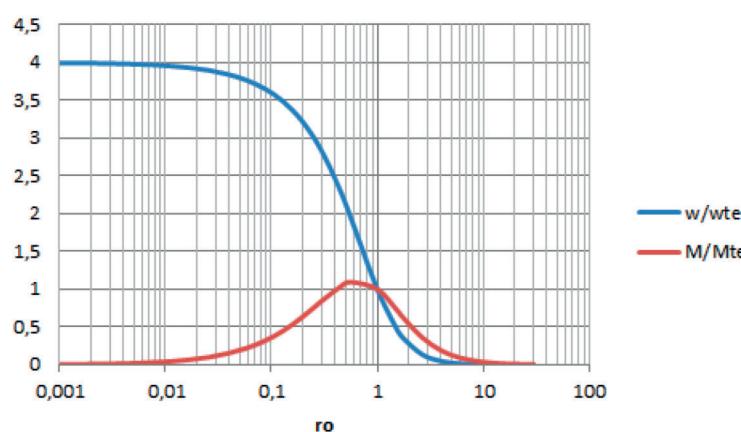


Figura 24 - Funzioni di  $\rho$ .  
Figure 24 - Functions of  $\rho$ .

ziale = 0, la curvatura iniziale = 0 la quota intermedia, la quota finale e la tangente finale = 0 ossia

$$Y = A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3$$

Sarà, dunque, possibile, calcolati i coefficienti del polinomio, trovare la traiettoria, la sua derivata seconda e quella terza, con la quale, annullandola, si trovano le due progressive dove è massima e minima la derivata seconda. Con tali derivate si ottiene, moltiplicando per  $v^2$ , la accelerazione del punto di contatto (Fig. 28).

### 8. Applicazione Passaggio a Livello

Nei passaggi a livello (PL), in corrispondenza della pavimentazione stradale, alle rotaie sono unite rigidamente le controrotaie: pertanto, il binario a 4 barre è caratterizzato da un modulo di rigidezza che si può ritenere doppio di quello del binario corrente. Ammettendo che resti costante la rigidezza = 0, la curvatura iniziale = 0 la quota intermedia, la quota finale e la tangente finale = 0 ossia

initial curvature = 0, the intermediate dimension, the final dimension and the final tangent = 0, i.e.

$$Y = A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3$$

Once the coefficients of the polynomial have been calculated, it will therefore be possible to find the trajectory, its second and third derivatives, with which, by setting it equal to zero, the two progressive ones are found where the second derivative is maximum and minimum. With these derivatives, the acceleration of the point of contact is obtained by multiplying by  $v^2$  (Fig. 28).

### 8. Level crossing application

In level crossings (PL), at the road flooring, the check rails are rigidly joined to the rails: therefore, the 4-bar track

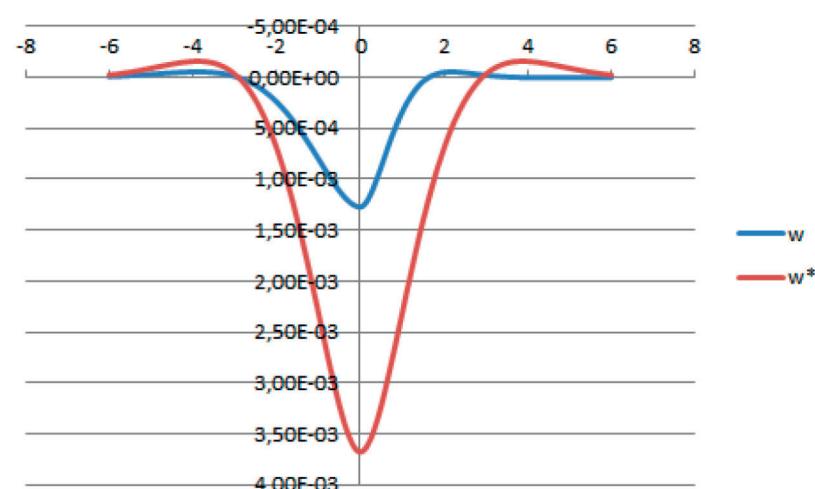


Figura 25 – Cedimenti in mm sotto carico -  $w^*$  è la deformata per la rigidezza costante  $C_w = 2E7$ .  
Figure 25 – Subsidence in mm under load -  $w^*$  is the deflected shape for constant stiffness  $C_w = 2E7$ .

## SCIENZA E TECNICA

Tabella 3 – Table 3

Andamento punto di contatto  
Point of Contact Trend

	Cw	k	$\lambda$	semionda half wave	ced subsidence	tg	$\rho$	f( $\rho$ )
punto iniziale starting point	2,00E+07	1,10E+07	0,809143	2,911961	3,68E-03	0		
punto centrale central point					1,27E-03		1,778279	0,345902
punto finale endpoint	2,00E+08	1,10E+08	1,438883	1,637516	6,54E-04	0		

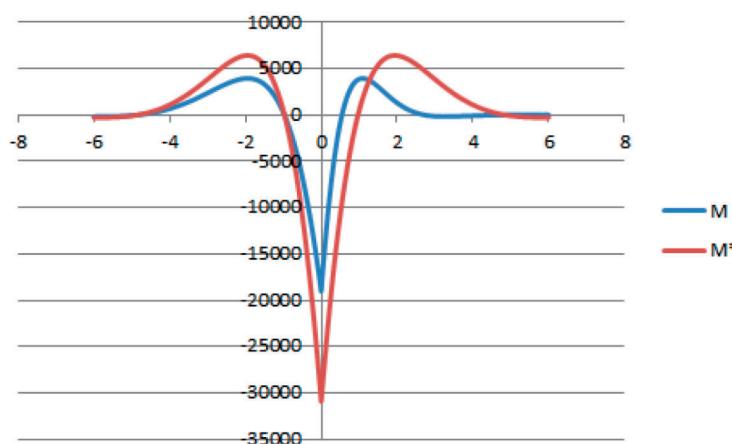


Figura 26 – Momenti in kN m -  $M^*$  è il momento per la rigidezza costante  $C_w = 2E7$ .

Figure 26 – Moments in kN m -  $M^*$  is the moment for constant stiffness  $C_w = 2E7$ .

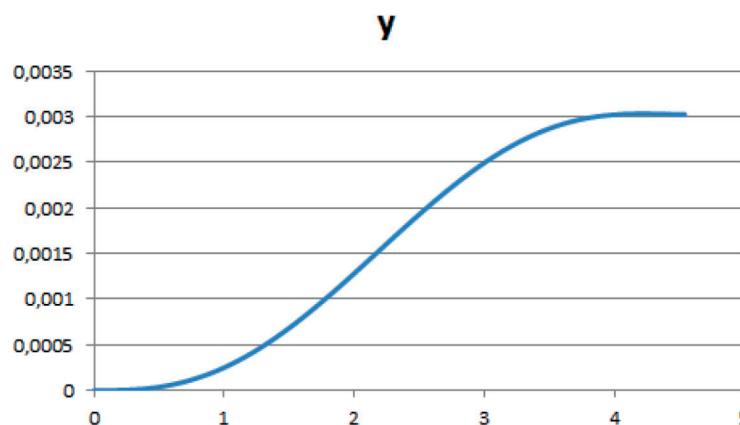


Figura 27 – Traiettoria altimetrica del punto di contatto.  
Figure 27 – Altimetric trajectory of the contact point.

is characterised by a stiffness module that can be considered double that of the current track. Assuming that the  $k$  stiffness of the support called  $J$  remains constant, the inertia of the current track and  $J'$  that of the track on  $PL$ , we have

$$w_{te} = \frac{P}{2\sqrt[4]{4E}} \frac{1}{\sqrt[4]{J}} k^{-\frac{3}{4}}$$

$$w_{pl} = \frac{P}{2\sqrt[4]{4E}} \frac{1}{\sqrt[4]{J'}} k^{-\frac{3}{4}}$$

$$w_{pl} = w_{te} \sqrt[4]{\frac{J}{J'}}$$

Therefore, the subsidence on  $PL$  is the current one as the fourth root of the ratio of inertias is. The same result is obtained by maintaining the current inertia and replacing the stiffness of substrate  $k$  with a fictitious stiffness  $k^*$  such that

$$\frac{1}{\sqrt[4]{J'}} k^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{J}} k^*^{-\frac{3}{4}}$$

This results in

$$k^* = k \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{3}}$$

So, going to the inverse of the characteristic length

$$\lambda_{eq} = \sqrt[4]{\frac{k^*}{4EJ}} = \lambda \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{12}}$$

which allows using the calculations made for the previous application. Then being

$$\rho = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda} = \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{12}}$$

## SCIENZA E TECNICA

za  $k$  del supporto detta  $J'$  l'inerzia del binario corrente e  $J$  quella del binario su PL, si ha

$$w_{te} = \frac{P}{2\sqrt[4]{4E}} \frac{1}{\sqrt[4]{J}} k^{-\frac{3}{4}}$$

$$w_{pl} = \frac{P}{2\sqrt[4]{4E}} \frac{1}{\sqrt[4]{J'}} k^{-\frac{3}{4}}$$

$$w_{pl} = w_{te} \sqrt[4]{\frac{J}{J'}}$$

Quindi, il cedimento su PL sta a quello corrente come la radice quarta del rapporto delle inerzie. Si ottiene lo stesso risultato mantenendo l'inerzia corrente e sostituendo alla rigidezza del sottofondo  $k$  una rigidezza fittizia  $k^*$  tale che

$$\frac{1}{\sqrt[4]{J'}} k^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{J}} k^{-\frac{3}{4}}$$

Si ottiene

$$k^* = k \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Quindi, passando all'inverso della lunghezza caratteristica

$$\lambda_{eq} = \sqrt[4]{\frac{k^*}{4EJ}} = \lambda \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{12}}$$

che consente di utilizzare i calcoli fatti per l'applicazione precedente. Allora essendo

$$\rho = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda} = \left( \frac{J'}{J} \right)^{\frac{1}{12}}$$

e poi  $f(\rho)$  che fornisce il cedimento al punto di transizione.

Eseguendo i calcoli come sopra, si ottiene, per  $C_w$  ( $te$ ) = 2E7 che l'accelerazione del punto di contatto – per una velocità di transito di 160 km/h – è quella della Fig. 29.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per le varie discontinuità (di inerzia della rotaria e di coefficiente di sottofondo) che s'incontrano lungo linea: per esempio scambi, spalle di opere d'arte, transizioni rilevato-trincea-galleria, ecc.

Ognuna di esse comporta l'insorgenza di moti verticali della sala e connesse oscillazioni della cassa del veicolo che, in qualche misura pregiudicano la qualità di marcia.

### 9. Trave semifinita. "Traversa ballerina"

Si chiama, in gergo, traversa ballerina quella traversa che, per vari motivi, presenta, rispetto a quelle attigue, una minore o nulla portanza a causa di

and then  $f(\rho)$  which provides the subsidence at the transition point.

Performing the calculations as above, we have, for  $C_w$  (elastic beam) = 2e7 that the acceleration of the contact point – for a transit speed of 160 km/h - is that in the Fig. 29.

Similar considerations can be made for the various discontinuities (of rail inertia and subgrade coefficient) that meet along the line: for example turnouts, road structure stringers, embankment-trench-gallery transitions, etc.

Each of them involves the onset of vertical movements of the wheel set and related oscillations of the vehicle body that, to some extent, affect the quality of travel.

### 9. Semi-finished beam. "Pumping sleeper"

Generally speaking, a pumping sleeper is a sleeper that, for various reasons, has a lower or no lift due to deconsolidation of the underlying ballast or, even, lack thereof, compared to those adjacent. Such a situation is quite frequent in old tracks armed with wooden sleepers and with compacted ballast with individual equipment, in modern tracks it is more rare because mechanised levelling prevents its presence.

However, below, with the application of the elastic beam formula, the consequences of the failure to lift of one or more consecutive sleepers are investigated (with the appropriate approximations).

The calculation scheme is as shown in Fig. 30.

The track with  $EJ$  given – for each rail – has current linear stiffness  $k$ . In a section AB, of length  $D$  – hereinafter "gap", the support is absent.

The subsidence under load  $P$  and the relative bending moment are calculated.

The vertical load  $P$  placed at the distance  $x$  from A is considered to be acting; the beam in B is disconnected and

acc m/s<sup>2</sup>

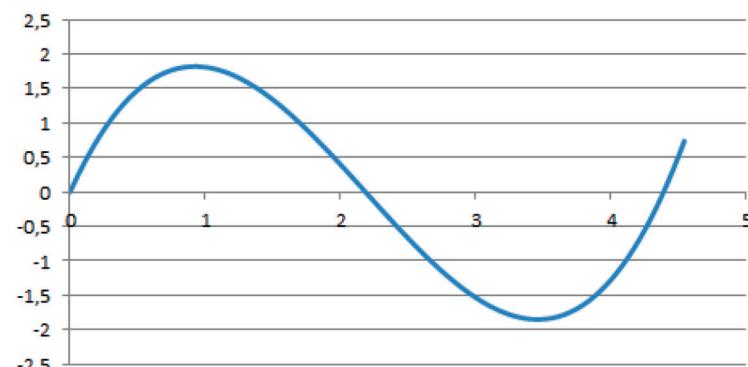


Figura 28 - Accelerazione del punto di contatto.  
Figure 28 - Point of Contact Acceleration.

## SCIENZA E TECNICA

acc m/s<sup>2</sup>

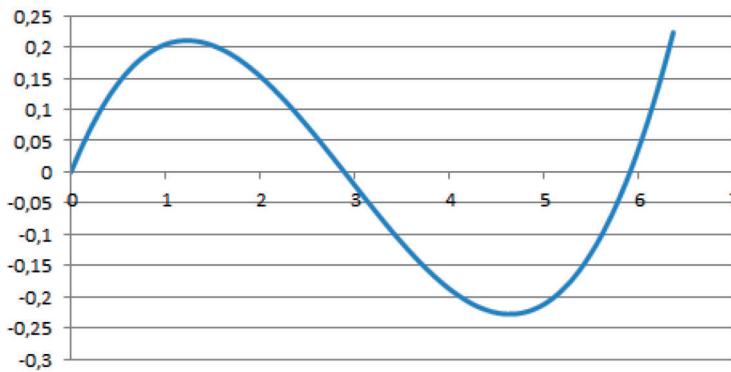


Figura 29 - Accelerazione del punto di contatto.

Figure 29 - Point of Contact Acceleration.

deconsolidamento del pietrisco sottostante o, addirittura, mancanza dello stesso. Tale situazione piuttosto frequente nei vecchi binari armati con traverse in legno e con massicciata compattata con attrezzi individuali, nei binari moderni è più rara perché il livellamento meccanizzato ne impedisce la presenza.

Comunque, nel seguito, con applicazione della formula della trave elastica si indagano (con le approssimazioni del caso) le conseguenze della mancata portanza di una o più traverse consecutive.

Lo schema di calcolo è in Fig. 30.

Il binario con  $EJ$  dato – per ciascuna rotaia – ha rigidità lineica corrente  $k$ . In un tratto  $AB$ , di lunghezza  $D$  – nel seguito “lacuna”, il supporto è assente.

the equilibrium reactions are applied: they are the vertical force  $V$  and the moment  $M$ .

It is necessary to write the system of equations imposing the congruence of rotations and displacements in  $B$ .

The rotation of the beam in  $A$  is given by [see formulas beam on elastic support]

$$\theta_A = \frac{PX - M - VD}{\lambda EJ} + \frac{P - V}{2EJ\lambda^2}$$

The displacement of the beam in  $A$  is given by

$$w_A = \frac{PX - M - VD}{2\lambda^2 EJ} + \frac{P - V}{2EJ\lambda^3}$$

The rotation of the beam to the right of  $B$  is given by

$$\theta_{dx} = -\frac{M}{\lambda EJ} + \frac{V}{2EJ\lambda^2}$$

The right displacement in  $B$  is given by

$$w_{dx} = -\frac{M}{2\lambda^2 EJ} + \frac{V}{2EJ\lambda^3}$$

The rotation of the beam to the left of  $B$  is given by

$$\theta_{sx} = \theta_A + \frac{PX^2/2 - VD^2/2 - MD}{EJ}$$

The displacement to the left in  $B$  is given by

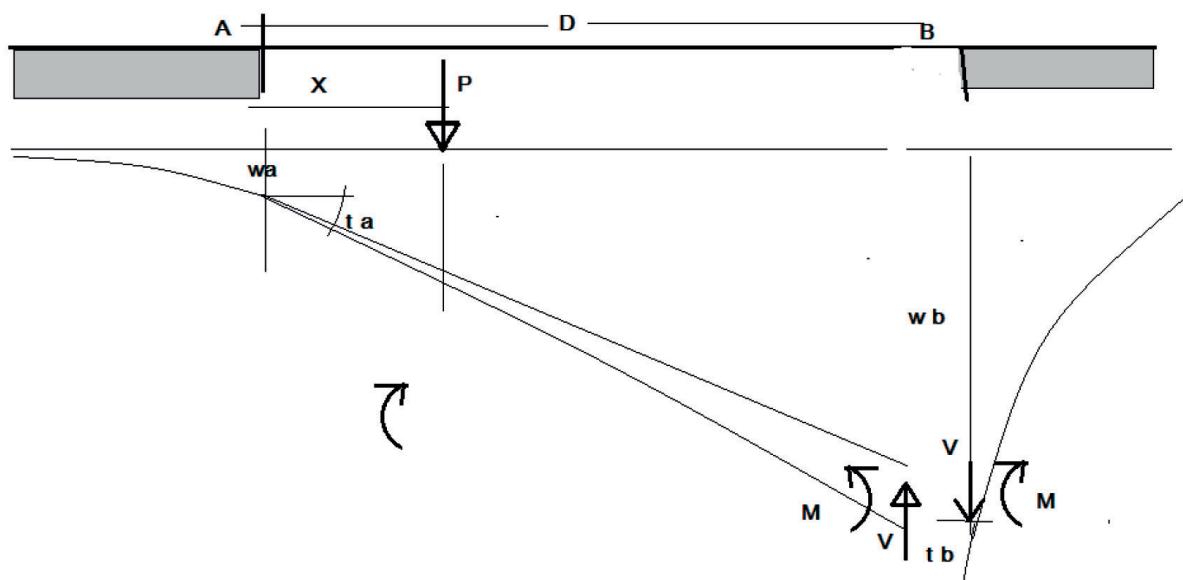


Figura 30 – Schema di carico.

Figure 30 – Load diagram.

## SCIENZA E TECNICA

Si calcolano il cedimento sottocarico  $P$  ed il relativo momento flettente.

Si considera agente il carico verticale  $P$  posto alla distanza  $x$  da  $A$ ; si disconnette la trave in  $B$  e si applicano le reazioni di equilibrio: esse sono la forza verticale  $V$  ed il momento  $M$ .

Occorre scrivere il sistema di equazioni imponendo la congruenza di rotazioni e spostamenti in  $B$ .

La rotazione della trave in  $A$  è data da [vds formule trave su appoggio elastico]

$$\theta_A = \frac{PX - M - VD}{\lambda EJ} + \frac{P - V}{2EJ\lambda^2}$$

Lo spostamento della trave in  $A$  è dato da

$$w_A = \frac{PX - M - VD}{2\lambda^2 EJ} + \frac{P - V}{2EJ\lambda^3}$$

La rotazione della trave a  $dx$  di  $B$  è data da

$$\theta_{dx} = -\frac{M}{\lambda EJ} + \frac{V}{2EJ\lambda^2}$$

Lo spostamento  $dx$  in  $B$  è dato da

$$w_{dx} = -\frac{M}{2\lambda^2 EJ} + \frac{V}{2EJ\lambda^3}$$

La rotazione della trave a  $sx$  di  $B$  è data da

$$\theta_{sx} = \theta_A + \frac{PX^2/2 - VD^2/2 - MD}{EJ}$$

Lo spostamento a  $sx$  in  $B$  è dato da

$$w_{sx} = w_A + \theta_A D + -\frac{PX^2}{2} \left( D - \frac{1}{3}X \right) - \frac{VD^3}{3} - \frac{1}{2}MD^2$$

Per la congruenza si ha

$$\theta_{dx} + \theta_{sx} = 0 \text{ e } w_{dx} = w_{sx}$$

Per  $D=X=0$ , ossia supporto continuo si ha

$$\theta_A = \frac{-M}{\lambda EJ} + \frac{P-V}{2EJ\lambda^2} \text{ (Eq. 3)}$$

$$w_A = \frac{-M}{2\lambda^2 EJ} + \frac{P-V}{2EJ\lambda^3} \text{ (Eq. 4)}$$

Essendo per la simmetria  $\theta_A = 0$  deve essere

$$M = \frac{P - V}{2\lambda}$$

Ed essendo  $V=P/2$

$$M = \frac{P}{4\lambda}$$

cioè il momento della trave elastica.

Inoltre

$$w_A = \frac{P}{8EJ\lambda^3}$$

ma essendo  $EJ = \frac{k}{4\lambda^4}$

$$w_A = \frac{P\lambda}{2k}$$

$$w_{sx} = w_A + \theta_A D + -\frac{PX^2}{2} \left( D - \frac{1}{3}X \right) - \frac{VD^3}{3} - \frac{1}{2}MD^2$$

For congruence we have

$$\theta_{dx} + \theta_{sx} = 0 \text{ e } w_{dx} = w_{sx}$$

For  $D=X=0$ , i.e. continuous support, we have

$$\theta_A = \frac{-M}{\lambda EJ} + \frac{P-V}{2EJ\lambda^2} \text{ (Eq. 3)}$$

$$w_A = \frac{-M}{2\lambda^2 EJ} + \frac{P-V}{2EJ\lambda^3} \text{ (Eq. 4)}$$

Being it for symmetry it must be

$$M = \frac{P - V}{2\lambda}$$

And it being  $V=P/2$

$$M = \frac{P}{4\lambda}$$

i.e. the moment of the elastic beam.

Additionally

$$w_A = \frac{P}{8EJ\lambda^3}$$

but it being  $EJ = \frac{k}{4\lambda^4}$

$$w_A = \frac{P\lambda}{2k}$$

which verifies the calculation.

In general, having obtained

$$\theta_A \text{ e } w_A$$

The following are obtained from (Eq. 3) and (Eq. 4)

$$M_A \text{ e } V_A$$

With these the moment under the load is obtained

$$M_p = M_A + V_A X$$

and, therefore, the subsidence under  $P$

$$w_p = w_A + \theta_A X - \frac{\frac{M_A X^2}{2} + \frac{M_p - M_A X^2}{6}}{EJ}$$

When  $P$  is at the centre of  $D$ , we have  $V = P/2$  and also for the symmetry

$$M_a = M$$

so by processing, the relation between the moment of the current elastic beam ( $M_{\text{elastic beam}}$ ) and the maximum moment under the load in the centre of the gap is obtained. ( $M_p$ ).

$$M_p = \frac{P}{4\lambda} - \frac{-[\eta/2]^2 + 1}{\eta/2 + 1} = M_{te} \left( + \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1 \right)$$

with  $\eta = \lambda D$ .

For  $D=0$ ;  $M_p = 1/4 P/\lambda$  (continuous beam).

Being

## SCIENZA E TECNICA

che verifica il calcolo.

In generale, ottenuti

$$\theta_A \text{ e } W_A$$

si ricavano dalle (Eq. 3) e da (Eq. 4)

$$M_A \text{ e } V_A$$

Con questi si ottiene il momento sotto il carico

$$M_p = M_A + V_A X$$

e, quindi, il cedimento sotto P

$$w_p = w_a + \theta_A X - \frac{\frac{M_A X^2}{2} + \frac{M_p - M_A X^2}{6}}{EJ}$$

Quando P è al centro di D, si ha V = P/2 ed inoltre per la simmetria

$$M_a = M$$

per cui elaborando, si ottiene la relazione tra momento della trave elastica corrente ( $M_{te}$ ) e momento massimo sotto il carico al centro della lacuna ( $M_p$ ).

$$M_p = \frac{P}{4\lambda} - \frac{[\eta/2]^2 + 1}{\eta/2 + 1} = M_{te} (+ \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1)$$

con  $\eta = \lambda D$ .

Per  $D=0$ ;  $M_p = 1/4 P/\lambda$  (trave continua).

Essendo

$$M_A = M_p - PD/4$$

si ha

$$M_a = \frac{P}{4\lambda} (+ \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1) - P\eta/\lambda 4$$

$$M_a = M_{te} (- \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1)$$

Se  $\eta > 2$  il momento in A e B è negativo (tende fibre superiori);

se  $\eta = 2$ , il momento in A e B è nullo e quello sotto il carico è pari al momento che si ha in una trave semplicemente appoggiata.

Il momento in mezzeria è sempre positivo.

Ammettendo, ora, un carico per ruota di 100 kN si ottiene che in una rotaia 60E1, un momento di 33,6 kNm provoca una tensione di 100 N/mm<sup>2</sup> (33600/ W) con W = 335 m<sup>6</sup>.

Tale momento è generato con un coefficiente  $C_w = 1,45E7$  [ $k = 7,965E6$  N/m<sup>2</sup> e  $\lambda = 0,746$  m<sup>-1</sup>].

Infatti  $M = 1E5 / (4 \cdot 0,746) = 33500$  Nm.

Per una lacuna D = 1,20 m (2 traverse prive di supporto) si ottiene  $\eta = 1,2$   $\lambda = 0,896$  m<sup>-1</sup>, da cui la tensione in rotaia passa a  $100(1 + 0,896/2) = 144,8$  MPa.

Per quanto riguarda i cedimenti si ha che il cedimento alla estremità della trave elastica semifinita sotto P/2 è

$$W(A, B) = \frac{2V\lambda}{k} - \frac{2M\lambda^2}{k} = \frac{P\lambda}{k} \left( \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2} \right)$$

$$M_A = M_p - PD/4$$

we have

$$M_a = \frac{P}{4\lambda} \left( + \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1 \right) - P\eta/\lambda 4$$

$$M_a = M_{te} \left( - \left[ \frac{\eta}{2} \right] + 1 \right)$$

If  $\eta > 2$  the moment in A and B is negative (upper fibres tensioned);

if  $\eta = 2$ , the moment in A and B is zero and that under the load is equal to the moment in a simply resting beam.

The moment in the centreline is always positive.

Assuming, now, a wheel load of 100 kN the result is that in a 60E1 rail, a moment of 33,6 kNm causes a tension of 100 N/mm<sup>2</sup> (33600/ W) with  $W = 335$  m<sup>6</sup>.

This moment is generated with a coefficient  $C_w = 1,45E7$  [ $k = 7,965E6$  N/m<sup>2</sup> e  $\lambda = 0,746$  m<sup>-1</sup>].

In fact  $M = 1E5 / (4 \cdot 0,746) = 33500$  Nm.

For a gap D = 1,20 m (2 sleepers without support), the result is  $\eta = 1,2$   $\lambda = 0,896$  m<sup>-1</sup>, from which the rail tension goes to  $100(1 + 0,896/2) = 144,8$  MPa.

As far as subsidences are concerned, the subsidence at the end of the semi-finished elastic beam below P/2 is

$$W(A, B) = \frac{2V\lambda}{k} - \frac{2M\lambda^2}{k} = \frac{P\lambda}{k} \left( \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2} \right)$$

and that under load P

$$w(p) = \frac{1}{48} \frac{Pb^3}{EJ} + \frac{Mb^2}{8EJ}$$

bearing in mind the transformation of  $EJ = k/(4\lambda)$  and replacing M

$$w(p) = \frac{1}{2} \frac{P\lambda}{k} \left( \frac{\eta^3}{24} + \frac{\eta^2}{2} \right)$$

And summing with the lowering in A and B

$$w(P) = \frac{P}{2k} \lambda \left( \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{\eta^2}{4} + 1 + \eta/2 \right)$$

from which the ratio between the subsidence is a cubic function of  $\eta$ .

Since the under load subsidence for the continuous support beam, (i.e. with  $D = 0$ , therefore  $\eta = 0$ ) the difference between the maximum subsidence in the gap and the current one has the value of the relation to the current subsidence,

$$\Delta w/w(te) \% = \frac{\eta}{2} \left[ 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{12} \right] 100$$

evidently equal to 0 when  $b = 0$  or with  $\eta = 0$ .

According to the previous example, with  $\eta = 0,896$  the subsidence increase is about 68%.

Being the current subsidence  $w = 4,68$  mm, the subsidence increase at the centre of the gap of m 1,20 is about 3,18 mm or 2,7/1000 of the span.

Similar situations were calculated with the discrete sup-

## SCIENZA E TECNICA

e quello sotto il carico  $P$

$$w(p) = \frac{1}{48} \frac{Pb^3}{EJ} + \frac{Mb^2}{8EJ}$$

ricordando la trasformazione di  $EJ = k/(4\lambda^4)$  e sostituendo  $M$

$$w(p) = \frac{1}{2} \frac{P\lambda}{k} \left( \frac{\eta^3}{24} + \frac{\eta^2}{2} \right)$$

E sommando con l'abbassamento in A e B

$$w(P) = \frac{P}{2k} \lambda \left( \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{\eta^2}{4} + 1 + \eta/2 \right)$$

da cui il rapporto tra i cedimenti è una funzione cubica di  $\eta$ .

Essendo il cedimento sottocarico per la trave a supporto continuo, (ossia con  $D = 0$ , quindi  $\eta = 0$ ) la differenza tra il cedimento massimo in lacuna e quello corrente vale rapporto al cedimento corrente,

$$\Delta w/w(te) \% = \frac{\eta}{2} \left[ 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{12} \right] 100$$

evidentemente pari a 0 quando  $b = 0$  ossia con  $\eta = 0$ .

Secondo l'esempio precedente, con  $\eta = 0,896$  l'incremento di cedimento è di circa il 68%.

Essendo il cedimento corrente  $w = 4,68$  mm, si ha che la maggiorazione di cedimento al centro della lacuna di m. 1,20 è di circa 3,18 mm ossia 2,7/1000 della luce.

Analoghe situazioni sono state calcolate con il metodo degli appoggi discreti, considerando l'asta centrale di lunghezza  $b = 1,2 / 1,8 / 2,4$  rispettivamente per 1, 2 o 3 appoggi non portanti.

I risultati sono in Tab. 4.

Come si vede si una buona concordanza tra i due criteri: per la condizione di carico centrato il calcolo su appoggi discreti fornisce una lieve maggiorazione dei momenti e dei cedimenti rispetto all'appoggio continuo.

Notevoli, invece, gli incrementi di momento e di cedimento in presenza di lacuna (fino a 3 volte per 3 traverse non portanti) presenti in Fig. 31.

Con un tale incremento di cedimento del punto di contatto ruota- rotaia si cerca quale sarebbe l'incremento dinamico del carico.

Si ipotizza che quando il carico, posto a sx, dista da A (inizio del tratto non supportato)  $\frac{3\pi}{4\lambda}$ , il cedimento sotto carico è quello corrente ( $w_{te}$ ); quando il carico è in  $D/2$  il cedimento è  $w_p$  la differenza  $w_p - w_{te} = \Delta f$ .

Per  $C_w = 2E7 \text{ N/m}^3$ ,  $\frac{3\pi}{4\lambda} = 2,912 \text{ m}$  e per  $C_w = 2E8 \text{ N/m}^3$ ,  $\frac{3\pi}{4\lambda} = 1,638 \text{ m}$ .

Ammettendo che la traiettoria del punto di contatto segua una legge  $w = \frac{\Delta f}{2} (1 - \cos \omega x)$  con  $\omega = \frac{\pi}{(b + \frac{3\pi}{4\lambda})}$  che nel

ports method, considering the central rod of length  $b = 1.2 / 1.8 / 2.4$  respectively for 1, 2 or 3 non-load-bearing supports.

The results are shown in the Tab. 4.

As can be seen, there is a good consistency between the two criteria: for the centred load condition, the calculation on discrete supports provides a slight increase in moments and subsidences compared to continuous support.

On the other hand, the moment and subsidence increases are significant in the presence of a gap (up to 3 times for 3 non-load-bearing sleepers) shown in Fig. 31.

With such an increase in subsiding of the wheel-rail contact point, we are researching what the dynamic increase of the load would be.

It is assumed that when the load, placed to the left, is distant from A (beginning of the unsupported section)  $\frac{3\pi}{4\lambda}$ , the subsidence under load is the current one ( $w_{eb}$ ); when the load is in  $D/2$  the subsidence is  $w_p$  the difference  $w_p - w_{eb} = \Delta f$ .

For  $C_w = 2E7 \text{ N/m}^3$ ,  $\frac{3\pi}{4\lambda} = 2,912 \text{ m}$  and for  $C_w = 2E8 \text{ N/m}^3$ ,  $\frac{3\pi}{4\lambda} = 1,638 \text{ m}$ .

Assuming that the trajectory of the point of contact follows a law  $w = \frac{\Delta f}{2} (1 - \cos \omega x)$  con  $\omega = \frac{\pi}{(b + \frac{3\pi}{4\lambda})}$  with  $\omega =$

which in the time domain becomes  $\Omega = \frac{v \pi}{(b + \frac{3\pi}{4\lambda})}$ . By deriving twice on the time we have  $w'' = \frac{\Delta f}{2} \Omega^2 \cos \Omega t$  and the maximum value is when the load is in  $D/2$ .

Therefore, the maximum dynamic action, given  $m$  [kg] a mass that participates in the motion of the point of contact, is

$$F_c = mw'' = m \frac{\Delta f}{2} \Omega^2 = mv^2 \Delta f \frac{4\lambda^2 \pi^2}{(b\lambda + \frac{3\pi}{2})^2} = mv^2 \Delta f \frac{4\lambda^2}{(\frac{\eta}{\pi} + 1,5)^2}$$

Being

$$\Delta f = w_{corr} \frac{\eta}{2} \left[ 1 + \frac{\eta^2}{12} + \frac{\eta}{2} \right]$$

Therefore

$$F_c = mv^2 \frac{\lambda^3}{(\frac{\eta}{\pi} + 1,5)^2} \frac{P}{k} \left[ \eta + \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^2}{2} \right]$$

The value of the dynamic increase is

$$ID = 1 + \frac{F_c}{P} = 1 + mv^2 \frac{1}{\lambda \left( \frac{\eta}{\pi} + 1,5 \right)^2} \frac{1}{EJ} \left[ \eta/4 + \frac{\eta^3}{48} + \frac{\eta^2}{8} \right]$$

i.e.

$$M_p \text{ din} = M_{te} \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) \cdot IDM_p \text{ din} = M_{te} \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) (1 + mv^2 \frac{1}{\lambda \left( \frac{\eta}{\pi} + 1,5 \right)^2} \frac{1}{EJ} \left[ \eta/4 + \frac{\eta^3}{48} + \frac{\eta^2}{8} \right])$$

that for  $D = 0$ , that is  $\eta = 0$ , has a value of

$$M_d = \frac{P}{4\lambda}$$

## SCIENZA E TECNICA

Tabella 4 – Table 4

Sinossi dei momenti e dei cedimenti per diverse situazioni di “lacuna”  
*Synopsis of moments and subsidences for different “gap” situations*

	appoggi discreti <i>discreet supports</i>						appoggio continuo (te) <i>continuous support (elastic beam)</i>			
C w	2,00E+07	EJ	6,42E+06	$\lambda$	0,809		$\eta$	0,49	0,97	1,46
	b	0,6	1,2	1,8	2,4	D	0	0,6	1,2	1,8
car cen	Mp	31,5	39,2	46,7	54,3	Mp	30,9	38,4	45,9	53,4
car app	Mp**	29,65								
car cent	yp	3,838	4,981	6,492	8,475	yp	3,678	4,804	6,469	8,777
car app	yp**	3,677								
C w	2,00E+08	EJ	6,42E+06	$\lambda$	1,439		eta	0,86	1,73	2,590
	b	0,6	1,2	1,8	2,4	D	0	0,6	1,2	1,8
car cen	Mp	18,6	26,4	34,0	41,6	Mp	17,4	24,9	32,4	39,9
car app	Mp**	15,1								
car cent	yp	0,676	1,010	1,560	2,429	yp	0,654	1,075	1,846	3,070
car app	yp**	0,651								

dominio del tempo diventa  $\Omega = \frac{v \pi}{\left(\frac{b}{2} + \frac{3\pi}{4\lambda}\right)}$ . Derivando due volte sul tempo si ha  $w'' = \frac{\Delta f}{2} \Omega^2 \cos \Omega t$  ed il valore massimo si ha quando il carico è in D/2.

Quindi, l'azione dinamica massima, posta m [kg] una massa che partecipa al moto del punto di contatto, vale

$$F_c = mw'' = m \frac{\Delta f}{2} \Omega^2 = mv^2 \Delta f \frac{4\lambda^2 \pi^2}{\left(\frac{b\lambda}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)^2} = mv^2 \Delta f \frac{4\lambda^2}{\left(\frac{\eta}{\pi} + 1,5\right)^2}$$

Essendo

$$\Delta f = w_{corr} \frac{\eta}{2} \left[ 1 + \frac{\eta^2}{12} + \frac{\eta}{2} \right]$$

Quindi

$$F_c = mv^2 \frac{\lambda^3}{\left(\frac{\eta}{\pi} + 1,5\right)^2} k \left[ \eta + \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^2}{2} \right]$$

L'incremento dinamico vale

$$ID = 1 + \frac{F_c}{P} = 1 + mv^2 \frac{1}{\lambda \left(\frac{\eta}{\pi} + 1,5\right)^2} \frac{1}{EJ} \left[ \eta/4 + \frac{\eta^3}{48} + \frac{\eta^2}{8} \right]$$

ossia

$$M_{p\ din} = M_{te} \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) \cdot ID M_{p\ din} = M_{te} \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) \left( 1 + mv^2 \frac{1}{\lambda \left(\frac{\eta}{\pi} + 1,5\right)^2} \frac{1}{EJ} \left[ \eta/4 + \frac{\eta^3}{48} + \frac{\eta^2}{8} \right] \right)$$

that is, the moment on continuous support.

In the application performed (Fig. 32), there would be an  $M_{p\ din} / M_{eb}$  ratio of about 1.765 times. The static one was 1.448 times.

Since, as a rule,  $0.8 < \lambda < 1.4$ , considering  $0.6 < D < 2.4$ , we have  $0.48 < \eta < 4.32$ .

As can be seen from the graph, the increase  $M_{p\ din} / M_{eb}$  increases with the subsiding of the support and with the width of the gap.

## 10. Conclusions

The “track calculation” was developed according to the two criteria considered by comparing their results and detecting a substantial consistency of the values provided.

The limits of the two criteria (the schematisation, with respect to reality, of a continuous support for the elastic beam) the restriction to a finite number of supports for the discrete criterion, do not entail significant consequences for the reliability of the results.

The elastic beam method offers the advantage of calculation in closed form but requires considering the regularity of the parameters (at least for a convenient length near the loads), except for somewhat complicated mathematical developments.

The discrete supports method – which requires the tedious compilation of equation systems – is more versatile (if

## SCIENZA E TECNICA

che per  $D = 0$ , ossia  $\eta = 0$ , vale

$$M_d = \frac{P}{4\lambda}$$

ossia il momento su appoggio continuo.

Nell'applicazione eseguita (Fig. 32) si avrebbe un rapporto  $M_{p \text{ din}} / M_{te}$  di circa 1,765 volte. Quello statico era di 1,448 volte.

Poiché, di norma,  $0,8 < \lambda < 1,4$ , considerando  $0,6 < D < 2,4$ , si ha  $0,48 < \eta < 4,32$ .

Come si evince dal grafico l'incremento  $M_{p \text{ din}} / M_{te}$  cresce con la cedevolezza del supporto e con l'ampiezza della lacuna.

### 10. Conclusioni

E' stato sviluppato il "calcolo del binario" secondo i due criteri considerati ponendo a confronto i loro risultati e riscontrando una sostanziale concordanza dei valori forniti.

I limiti dei due criteri (la schematizzazione, rispetto alla realtà, di un appoggio continuo per la trave elastica) la restrizione ad un numero finito di appoggi per il criterio discreto, non comportano sensibili conseguenze per la affidabilità dei risultati.

Il metodo della trave elastica offre il vantaggio della calcolazione in forma chiusa ma obbliga - salvo richiedere sviluppi matematici alquanto complicati - a considerare la costanza dei parametri (almeno per una estesa conveniente in prossimità dei carichi).

Il metodo degli appoggi discreti - che richiede la tediosa compilazione di sistemi di equazioni - è più versatile (nel caso possono essere variati i parametri in gioco lungo lo sviluppo della trave) e illustra le conseguenze nelle sollecitazioni e nei cedimenti nei due casi di carico centrato in campata o posto sull'appoggio.

Sono stati esemplificate alcune situazioni particolari (variazione brusca della rigidezza del supporto, variazione del momento di inerzia della trave, "traversa ballerina") e sono stimati gli effetti.

Ognuna di esse, come deve essere, è causa di perturbazione alla marcia dei veicoli - la variazione di cedimento genera accelerazioni verticali, anche di una discreta entità - con negativi riflessi sul confort di viaggio.

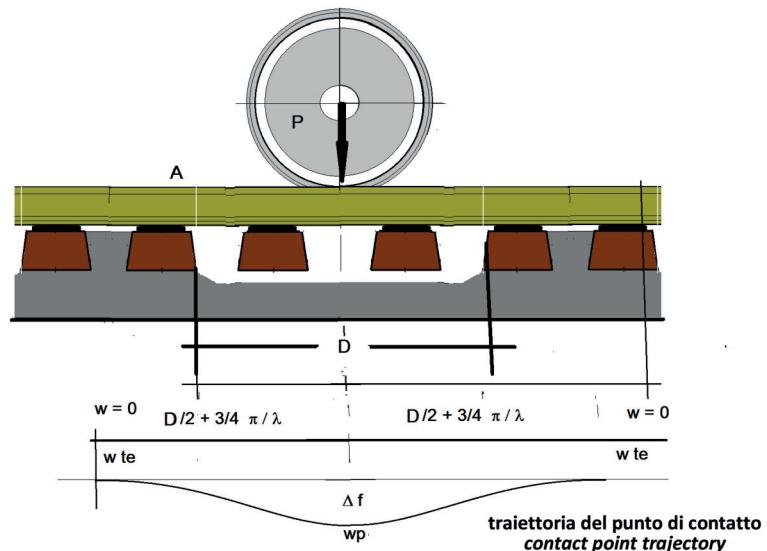


Figura 31 – Andamento altimetrico del punto di contatto in presenza di "lacuna".

Figure 31 – Altimetric trend of the contact point in the presence of a "gap".

necessary the parameters in play along the length of the beam can be varied) and illustrates the consequences in stresses and subsiding in the two cases of load centred in the span or placed on the support.

Some particular situations have been exemplified (abrupt change in the rigidity of the support, change in the moment of inertia of the beam, "pumping sleeper") and the effects are estimated.

Each of them, as it should be, is a cause of disturbance to the circulation of vehicles - the variation in subsiding generates vertical accelerations, even of a fair amount - with negative effects on travel comfort.

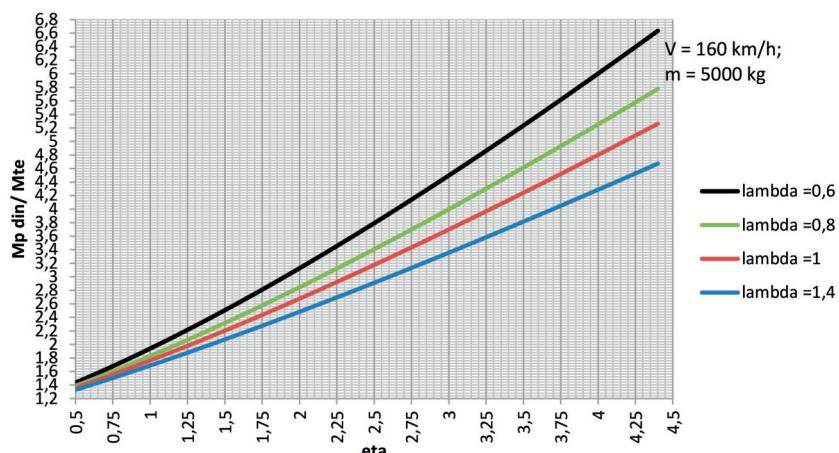


Figura 32 – Incrementi dinamici in presenza di "lacuna".

Figure 32 – Dynamic increases in the presence of a "gap".

## SCIENZA E TECNICA

Mentre per le linee di nuova costruzione, si ovvia mediante opportuni accorgimenti (distribuendo la variazione di rigidezza del sottofondo su una congrua estesa di binario, elasticizzando gli attacchi degli scambi, p.es.), sulle linee di vecchia costruzione tali difettosità sono, praticamente, ineliminabili ma, tollerabili.

Le frequenti variazioni delle caratteristiche di portanza del supporto e connesse variazioni di cedimento sotto carico - che vengono lette dalle strumentazioni di misura allestite su carrozze di rilievo - si coniugano alle differenze statiche di quota e determinano i reali "difetti di livello"; alcune di esse sono fisiologiche (transizioni rilevato/ spalle delle opere d'arte oppure trincea /galleria, passaggi a livello, transiti su apparecchi del binario, ecc.) e, pertanto, nelle valutazioni di qualità dl binario occorre una attenta segmentazione delle tratte omogenee significative.

*While for the new construction lines, it is solved with appropriate measures (distributing the variation in rigidity of the substrate on a congruous track length, elasticising the fastenings of the turnouts, e.g.), on the old construction lines such defects cannot, practically, be eliminated but are tolerable.*

*The frequent variations in the load bearing characteristics of the support and the related variations in subsiding under load - which are read by the measuring instruments installed on track inspection carriages - are combined with the static differences in height and determine the real "level defects"; some of them are physiological (embankment/civil works abutments or trench /tunnel transitions, level crossings, transits on track devices, etc.) and, therefore, in the quality assessments of the track, a careful segmentation of the significant homogeneous sections is necessary.*

### BIBLIOGRAFIA - REFERENCES

- [1] PERDONNET A. (1855), "Traité élémentaire des Chemins de Fer" – Langlois et Leclercq. – Paris.
- [2] CANTALUPI A. (1872), "Trattato elementare di costruzione delle strade ferrate" – Galli e Omodei Editori Librai - Milano.
- [3] LOPEZ PITA A. et al. (1977), "Tratado de ferrocarriles i via" - Editorial Rueda – 1977
- [4] MARONGIU L. (2022), "Armamento ferroviario: impostazione e verifica dei requisiti di progetto tramite un modello quantitativo ingegneristico" - Ingegneria Ferroviaria -n° 6.
- [5] ESVELD C. (1989), "Modern Railway Track" – MRT Production 1989 e succ.
- [6] LANNI S. et al., "La sovrastruutura ferroviaria" – CIFI.
- [7] ROBERT G. (1964). "Le ferrovie nel mondo" - C.E.D. F. Vallardi.
- [8] DI MAIO F. (1939), "Analisi delle azioni dinamiche che sollecitano le sale delle automotrici" – Rivista Tecnica delle FERROVIE dello N° 12.
- [9] Autori vari (1993), "Speciale FS – Sperimentazione A.V." – Ingegneria Ferroviaria N° 6.
- [10] PANDOLFO A. (1975), "Il binario e l'alta velocità nelle linee a traffico misto" - Ingegneria Ferroviaria N° 1.
- [11] ANGELERI G. (1982), "Il binario su supporti elastici a due stadi". Ingegneria Ferroviaria N° 3.
- [12] D'ANDREA A. (1988), "L'applicazione del metodo degli elementi finiti ad una struttura ferroviaria sperimentale su supporto rigido" - Ingegneria Ferroviaria N° 7/8.
- [13] CIOFFI E., CORAZZA G.R., KAJON G. (2003), "Caratteristiche e prestazioni degli armamenti" - Ingegneria Ferroviaria N° 2.
- [14] BRUNER M., CIOFFI E., CORAZZA G.R., KAJON G. (2005), "Modelli analitici d'armamento e loro impiego nello studio del degrado della via" - Ingegneria Ferroviaria N° 11.
- [15] CONLES E., NOVALES M. (2013), "Studio sulla meccanica del binario a scartamento ridotto per velocità fino a 160 km/h (Parte prima) / Study on narrow gauge track mechanics for speeding-up to 160 km/h (First part)" - Ingegneria Ferroviaria N° 1.
- [16] CONLES E., NOVALES M. (2013), "Studio sulla meccanica del binario a scartamento ridotto per velocità fino a 160 km/h (Parte seconda) / Study on narrow gauge track mechanics for speeding-up to 160 km/h (Second part)" - Ingegneria Ferroviaria N° 2.
- [17] ACCATTATIS F.M.D., BRUNER M., CATENA M., CORAZZA G.R., COSCIOTTI E., MALAVASI G., ROSSI S., TESTA M. (2014), "Misura dei carichi verticali trasmessi alla rotaia" / "Measurement of the vertical loads transferred to the rail" -Ingegneria Ferroviaria N° 12.
- [18] BRUNER M., CORAZZA G.R., MALAVASI G. (2020), "Mitigazione delle vibrazioni dell'armamento ferroviario su massicciata" -Ingegneria Ferroviaria N° 12.
- [19] BRUNER M., CORAZZA G.R. (2018), "Note sullo sviluppo di un pensiero scientifico originale nelle ferrovie. La marcia in rettilineo ed in curva".- Ingegneria Ferroviaria 9.

## SCIENZA E TECNICA

### Appendice A

#### Sviluppo dei calcoli per la trave continua su 18 appoggi

Essendo

Area di appoggio della traversa =  $A$  [ $m^2$ ]

Rigidezza del singolo appoggio  $K = C_w A$  [ $N/m$ ]

Con  $W_l = l/EJ$  e  $W_b = b/EJ$

$K_l = K \cdot l$  e  $K_b = K \cdot b$  ed, inoltre,  $\alpha x/l$ ;  $\beta = 1 - \alpha$

$\mu_9 = b \alpha^2 \beta$ ;  $\mu_{10} = b \alpha \beta^2$

$R_i$  ed  $M_i$  la reazione ed il momento all'appoggio i

Si scrivono le eq. di eq.

$$1) M_2 \cdot 4 W_l + M_3 W_l - R_1 \cdot 6/ K_l + R_2 (6 / K_l + 6 / K_l) - R_3 \cdot 6 / K_l = 0$$

$$2) M_2 \cdot W_l + 4 M_3 W_l + M_4 W_l - R_2 \cdot 6 / K_l + R_3 (6 / K_l + 6 / K_l) - R_4 \cdot 6 / K_l = 0$$

3) .....

4) .....

5) .....

6) .....

7) .....

$$8) M_8 \cdot W_l + M_9 (2 W_l + 2 W_b) + M_{10} W_b - R_7 \cdot 6 / K_l + R_8 (6 / K_l + 6 / K_b) - R_9 \cdot 6 / K_l = -W_b (2_9 + 10)$$

$$9) M_9 \cdot W_b + M_{10} (2 W_b + 2 W_l) + M_{11} W_l - R_8 \cdot 6 / K_l + R_9 (6 / K_b + 6 / K_l) - R_{10} \cdot 6 / K_l = -W_b (2_{10} + 9)$$

$$10) M_{10} \cdot W_b + M_{11} (4 W_b) + M_{12} W_b - R_9 \cdot 6 / K_l + R_{10} (6 / K_l + 6 / K_b) - R_{11} \cdot 6 / K_l = 0$$

11) .....

12) .....

13) .....

$$14) M_{14} \cdot W_l + 4 M_{15} W_l + M_{16} W_l - R_{14} \cdot 6 / K_l + R_{15} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{16} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$15) M_{15} \cdot W_l + 4 M_{16} W_l + M_{17} W_l - R_{15} \cdot 6 / K_l + R_{16} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{17} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$16) M_{16} \cdot W_l + 4 M_{17} W_l - R_{16} \cdot 6 / K_l + R_{17} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{18} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$17) -M_2 - R_1 l = 0$$

$$18) -M_3 - 2 R_1 l - R_2 l = 0$$

18) .....

19) .....

.....

$$25) -M_{10} - (8 \cdot l + b) R_1 - (7 \cdot l + b) R_2 - \dots - R_{10} \cdot l = l \cdot$$

.....

$$34) R_1 + R_2 + R_{15} \dots + R_{18} = 1$$

Calcolati i momenti e le reazioni (da cui i cedimenti  $y_i = R_i / K$ ) si calcola

### Appendix A

#### Development of calculations for the continuous beam on 18 supports

Being

Sleeper support area =  $A$  [ $m^2$ ]

Stiffness of the individual support  $K = C_w A$  [ $N/m$ ]

With  $W^l = l/EJ$  and  $W^b = b/EJ$

$Kl = K \cdot l$  and  $Kb = K \cdot b$  and, in addition,  $\alpha x/l$ ;  $\beta = 1 - \alpha$

$\mu_9 = b \alpha^2 \beta$ ;  $\mu_{10} = b \alpha \beta^2$

$R_i$  and  $M_i$  the reaction and the moment at support i

The eq. of eq. are written

$$1) M_2 \cdot 4 W_l + M_3 W_l - R_1 \cdot 6 / K_l + R_2 (6 / K_l + 6 / K_l) - R_3 \cdot 6 / K_l = 0$$

$$2) M_2 \cdot W_l + 4 M_3 W_l + M_4 W_l - R_2 \cdot 6 / K_l + R_3 (6 / K_l + 6 / K_l) - R_4 \cdot 6 / K_l = 0$$

3) .....

4) .....

5) .....

6) .....

7) .....

$$8) M_8 \cdot W_l + M_9 (2 W_l + 2 W_b) + M_{10} W_b - R_7 \cdot 6 / K_l + R_8 (6 / K_l + 6 / K_b) - R_9 \cdot 6 / K_l = -W_b (2_9 + 10)$$

$$9) M_9 \cdot W_b + M_{10} (2 W_b + 2 W_l) + M_{11} W_l - R_8 \cdot 6 / K_l + R_9 (6 / K_b + 6 / K_l) - R_{10} \cdot 6 / K_l = -W_b (2_{10} + 9)$$

$$10) M_{10} \cdot W_b + M_{11} (4 W_b) + M_{12} W_b - R_9 \cdot 6 / K_l + R_{10} (6 / K_l + 6 / K_b) - R_{11} \cdot 6 / K_l = 0$$

11) .....

12) .....

13) .....

$$14) M_{14} \cdot W_l + 4 M_{15} W_l + M_{16} W_l - R_{14} \cdot 6 / K_l + R_{15} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{16} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$15) M_{15} \cdot W_l + 4 M_{16} W_l + M_{17} W_l - R_{15} \cdot 6 / K_l + R_{16} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{17} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$16) M_{16} \cdot W_l + 4 M_{17} W_l - R_{16} \cdot 6 / K_l + R_{17} (6 / K_l + 6 / K_l) - R_{18} \cdot 6 / K_l = 0$$

$$17) -M_2 - R_1 l = 0$$

$$18) -M_3 - 2 R_1 l - R_2 l = 0$$

18) .....

19) .....

.....

$$25) -M_{10} - (8 \cdot l + b) R_1 - (7 \cdot l + b) R_2 - \dots - R_{10} \cdot l = l \cdot$$

.....

$$34) R_1 + R_2 + R_{15} \dots + R_{18} = 1$$

After calculating the moments and reactions (from which the subsidences  $y_i = R_i / K$ ) the is calculated

## SCIENZA E TECNICA

$$T_9 = K(y_1 y_9) \text{ e } Mp = M9 + T9 \cdot l$$

Indi si calcola

$$\delta = y_9 - y_{10} \text{ e } \gamma = \delta / b$$

Essendo

$$EJ y = m_9 x^2 / 2 + (Mp - M_9) x^2 / 6$$

Si ottiene

$$y_p = -\delta/b + y_9 + \Delta y$$

### Appendice B

#### Sviluppo dei calcoli per la trave su 23 appoggi simmetricamente caricata

Con la seguente convenzione (Fig. B.1), equilibrio dei momenti nel nodo a l'

$$0 = -\frac{m_a}{l} - R_0$$

$$\text{Da cui } m_a = -R_0 l$$

Equilibrio momenti nodo b

$$-m_b = R_2 2l + R_a$$

Imponendo la congruenza e ponendo  $\gamma = \frac{EJ}{l^2 K}$  si ottiene

$$0 = 2m_a + \frac{1}{2} m_b - 3R_0\gamma + 6R_a\gamma - 3R_b\gamma \quad \#12$$

$$0 = \frac{1}{2} m_a + 2m_b + \frac{1}{2} m_c - 3R_a\gamma + 6R_b\gamma - 3R_c\gamma \quad \#13$$

$$0 = \frac{1}{2} m_i + 2m_j + \frac{1}{2} m_k - 3R_i\gamma + 6R_j\gamma - 3R_k\gamma \quad \#22$$

$$0 = \frac{1}{2} m_j + 2m_k + \frac{1}{2} m_i - 3R_j\gamma + 6R_k\gamma - 3R_i\gamma = \\ = \frac{1}{2} m_j + m_k - 3\gamma R_j + 3R_k \quad \#23$$

essendo, per la simmetria,  $m_j = m_j'$  e  $R_j = R_j'$

dove devono essere sostituiti i momenti con le equazioni contenenti le reazioni  $R_i$ .

L'ultima equazione è l'equazione di equilibrio verticale.

$$T_9 = K(y_1 y_9) \text{ and } Mp = M9 + T9 \cdot l$$

Hence is calculated

$$\delta = y_9 - y_{10} \text{ e } \gamma = \delta / b$$

Being

$$EJ y = m_9 x^2 / 2 + (Mp - M_9) x^2 / 6$$

We obtain

$$y_p = -\delta/b + y_9 + \Delta y$$

### Appendix B

#### Development of calculations for the beam symmetrically loaded on 23 supports

With the following convention (Fig. B.1), the balance of moments in node a

$$0 = -\frac{m_a}{l} - R_0$$

$$\text{From which } m_a = -R_0 l$$

Moments equilibrium node b

$$-m_b = R_2 2l + R_a$$

By imposing congruence and placing  $\gamma = \frac{EJ}{l^2 K}$  s, we obtain

$$0 = 2m_a + \frac{1}{2} m_b - 3R_0\gamma + 6R_a\gamma - 3R_b\gamma \quad \#12$$

$$0 = \frac{1}{2} m_a + 2m_b + \frac{1}{2} m_c - 3R_a\gamma + 6R_b\gamma - 3R_c\gamma \quad \#13$$

$$0 = \frac{1}{2} m_i + 2m_j + \frac{1}{2} m_k - 3R_i\gamma + 6R_j\gamma - 3R_k\gamma \quad \#22$$

$$0 = \frac{1}{2} m_j + 2m_k + \frac{1}{2} m_i - 3R_j\gamma + 6R_k\gamma - 3R_i\gamma = \\ = \frac{1}{2} m_j + m_k - 3\gamma R_j + 3R_k \quad \#23$$

being, for symmetry,  $m_j = m_j'$  and  $R_j = R_j'$

where the moments must be replaced with the equations containing the  $R_i$  reactions.

The last equation is the vertical equilibrium equation.

$$- \quad \square(\square + 1)$$

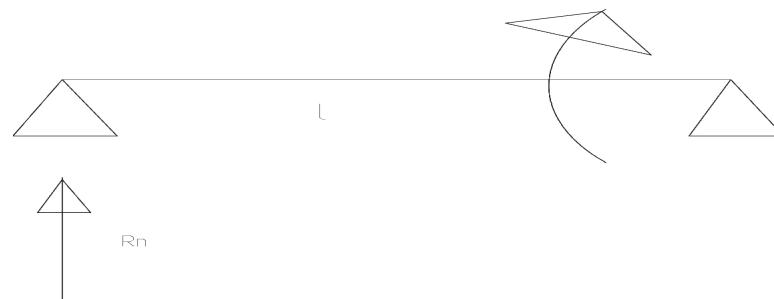


Figura B.1 - Convenzione sulla rotazione di flessione della trave;  
Figure B.1 - Convention on beam flexural rotation



# Per una mobilità urbana efficiente e sicura



**Armamento ferroviario**

**Molatura e diagnostica binario**

**Energia, segnalamento e TLC**

**Macchine ferroviarie**

**Materiali ferroviari**

**Ingegneria e progettazione**

[www.salcef.com](http://www.salcef.com)

